

## Série 2: Corrigé

Laboratoire d'Astrophysique <http://lastro.epfl.ch>  
 Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne  
 Semestre de printemps 2019

## Exercice 1 : Ellipse et lois de Kepler

- a) Il est parfois plus pratique de caractériser une orbite en coordonnées polaires, telles que  $r$  la distance depuis le foyer principal  $F$  et l'angle  $\theta$  sous-tendu entre  $r$  et le demi-axe principal  $a$ . Partant du théorème de Pythagore, nous obtenons :

$$r'^2 = r^2 \sin^2 \theta + (2ae + r \cos \theta)^2 \quad (1)$$

$$= r^2 + 4a^2 e^2 + 4aer \cos \theta \quad (2)$$

En combinant avec la définition de l'ellipse,  $r' = 2a - r$ , qui donne donc  $r'^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar$ , on obtient :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}. \quad (3)$$

- b) En général, on peut traiter un problème à deux corps comme un problème à un corps avec une masse réduite  $\mu$  en mouvement autour d'une masse fixe  $M$  à la distance  $r$ . Le moment cinétique devient :

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v}. \quad (4)$$

Comme nous avons à faire avec un mouvement central  $\vec{L} = \text{cste}$  et alors l'aire balayée par unité de temps (vitesse aréolaire) est constante. C'est la Seconde Loi de Kepler :

$$\frac{dA}{dt} = \left\| \frac{1}{2} \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right\| = \frac{\|\vec{L}\|}{2\mu} = \text{cst}. \quad (5)$$

La vitesse s'exprime par une composante radiale le long de  $\vec{r}$  et une autre perpendiculaire à  $\vec{r}$  :

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}. \quad (6)$$

En combinant les deux équations ci-dessus ( $dA/dt = \frac{1}{2} r r \dot{\theta} = \frac{L}{2\mu}$ ), nous obtenons :

$$v_\theta = \frac{L}{r\mu}. \quad (7)$$

Il suffit maintenant d'exprimer  $L$  en fonction de  $P$ ,  $e$ ,  $a$  et  $\mu$ . Nous intégrons l'équation (5) sur une période complète  $P$ , alors :

$$A = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu} P \longrightarrow L = 2A \frac{\mu}{P}. \quad (8)$$

Comme l'aire d'une ellipse est  $A = \pi ab$  et que  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ , le moment cinétique devient :

$$L = 2\mu\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} / P. \quad (9)$$

On obtient la composante angulaire de la vitesse en combinant les équations (3), (7) et (9) :

$$v_\theta = \frac{2\pi a(1 + e \cos \theta)}{\sqrt{1 - e^2} P}. \quad (10)$$

A partir de l'équation (3), la vitesse radiale est :

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos \theta)^2} e \sin \theta \dot{\theta}, \quad (11)$$

où  $\dot{\theta}$  pourra être exprimé à partir de  $v_\theta$ . Après simplification nous obtenons :

$$v_r = \frac{2\pi a e \sin \theta}{P \sqrt{1 - e^2}}. \quad (12)$$

c) L'équation provient de  $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$ , de l'équation (3) et de la troisième loi de Kepler :

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}. \quad (13)$$

Le détail du calcul est :

$$v^2 = v_\theta^2 + v_r^2 \quad (14)$$

$$= \frac{4\pi^2 a^2 (1 + e \cos \theta)^2}{P^2 (1 - e^2)} + \frac{4\pi^2 a^2 e^2 \sin^2 \theta}{P^2 (1 - e^2)} \quad (15)$$

$$= \frac{4\pi^2 a^2 (1 + e^2 + 2e \cos \theta)}{P^2 (1 - e^2)} \quad (16)$$

$$= G(m_1 + m_2) \left[ \frac{2(1 + e \cos \theta)}{a(1 - e^2)} - \frac{1 - e^2}{a(1 - e^2)} \right] \quad (17)$$

$$= G(m_1 + m_2) \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]. \quad (18)$$

## Exercice 2 : Orbite de la comète de Halley

Pour résoudre ce problème, il nous faut reprendre des équations de l'énoncé de l'exercice sur les ellipses et lois de Kepler :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (19)$$

$$v^2 = G(m_1 + m_2) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (20)$$

a) La troisième loi de Kepler exprimée dans les unités usuelles est :

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}, \quad (21)$$

avec la période  $P$  en secondes, le demi-grand axe  $a$  en mètres et la masse  $m$  en kilogrammes. Si nous remplaçons les kilogrammes par des masses solaires ( $1M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$  kg), les secondes par des années sidérales ( $1 \text{ a.s.} = 365.256$  jours solaires moyens, soit  $3.1558 \times 10^7$  s) et les mètres par des unités astronomiques ( $1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{11}$  m.), alors  $G = 4\pi^2$ . L'équation (21) devient :

$$P^2 = \frac{a^3}{m_1 + m_2}. \quad (22)$$

La masse de l'ensemble des planètes du système solaire ne représente que 1/745 de  $M_\odot$ . Autrement dit, la masse d'une planète est négligeable devant celle du Soleil. La troisième loi de Kepler propre au système solaire est par conséquent :

$$P^2 = a^3. \quad (23)$$

b) Pour calculer le demi-grand axe de la comète de Halley, nous utilisons l'équation (23) avec une période  $P = 76$  ans. Nous obtenons :

$$a = P^{2/3} = 17.94 \text{ AU} = 2.68 \times 10^{12} \text{ m}. \quad (24)$$

c) Avec la troisième loi de Kepler (21), nous obtenons directement la masse du Soleil (la masse de la comète est négligeable devant celle du Soleil) :

$$M_\odot = \frac{4\pi^2 a^3}{G P^2} \quad (25)$$

$$= \frac{4\pi^2 (2.68 \times 10^{12})^3}{6.673 \times 10^{-11} (76 \times 3.1558 \times 10^7)^2} \text{ kg} \quad (26)$$

$$= 1.979 \times 10^{30} \text{ kg}. \quad (27)$$

d) Pour calculer le périhélie et l'aphélie de la comète de Halley, nous utilisons l'équation (19). Les angles  $\theta$  au périhélie et à l'aphélie sont respectivement  $\theta = 0^\circ$  et  $180^\circ$ . Nous obtenons :

$$r_p = a \frac{1 - e^2}{1 + e} = a(1 - e) = 0.59 \text{ AU} = 8.78 \times 10^{10} \text{ m} \quad (28)$$

$$r_a = a \frac{1 - e^2}{1 - e} = a(1 + e) = 35.29 \text{ AU} = 5.28 \times 10^{12} \text{ m}. \quad (29)$$

e) La vitesse orbitale en ces positions s'obtient en insérant ces distances  $r$  dans (20) :

$$v_p = \left( GM_\odot \left[ \frac{1}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e} \right] \right)^{1/2} = 5.46 \times 10^4 \text{ m/s} \quad (30)$$

$$v_a = \left( GM_\odot \left[ \frac{1}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e} \right] \right)^{1/2} = 9.07 \times 10^2 \text{ m/s}. \quad (31)$$

Enfin, le rapport des énergies cinétiques ne fait intervenir que les vitesses orbitales au carré. Nous avons :

$$E_p^{\text{cin}}/E_a^{\text{cin}} = \left( \frac{v_p}{v_a} \right)^2 = 3.62 \times 10^3. \quad (32)$$