Introduction à l'Astrophysique

Série 2: Enoncé

Laboratoire d'Astrophysique http://lastro.epfl.ch
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2019

Rappel théorique : problème à deux corps

Le *problème à deux corps* concerne l'étude du mouvement de deux points matériels de masse m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle. Il possède une solution analytique. En effet, les équations du mouvement des deux masses :

$$\vec{F}_{12} = m_1\ddot{\vec{x}}_1 \qquad \text{et} \qquad \vec{F}_{21} = m_2\ddot{\vec{x}}_2 \tag{1}$$

peuvent se réécrire comme l'équation du mouvement du centre de masse et une équation décrivant le mouvement relatif entre les deux corps, de la façon :

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{\vec{x}}_{\text{CM}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{F}(r) = \mu\ddot{\vec{r}} \tag{2}$$

avec $\mu = (m_1 m_2)/(m_1+m_2)$ et $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. Cette dernière équation a donc la forme de l'équation du mouvement d'une masse μ dans un potentiel gravitationnel stationnaire.

A partir des solutions de ces équations, on peut reconstuire les trajectoires individuelles de m_1 et m_2.

Exercice 1 : Ellipse et lois de Kepler

a) On peut définir une ellipse comme le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante (voir figure 1) :

$$r + r' = 2a, \tag{3}$$

où a est le demi-grand axe et r et r' les distances de l'ellipse aux deux points focaux. Posons que la distance des points focaux au centre de l'ellipse est

$$OF = OF' = ea, \tag{4}$$

où e est appelé l'excentricité de l'ellipse ($0 \leq e < 1$). Retrouvez la formule

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}. \tag{5}$$

Indication : exprimez r' par le théorème de Pythagore.

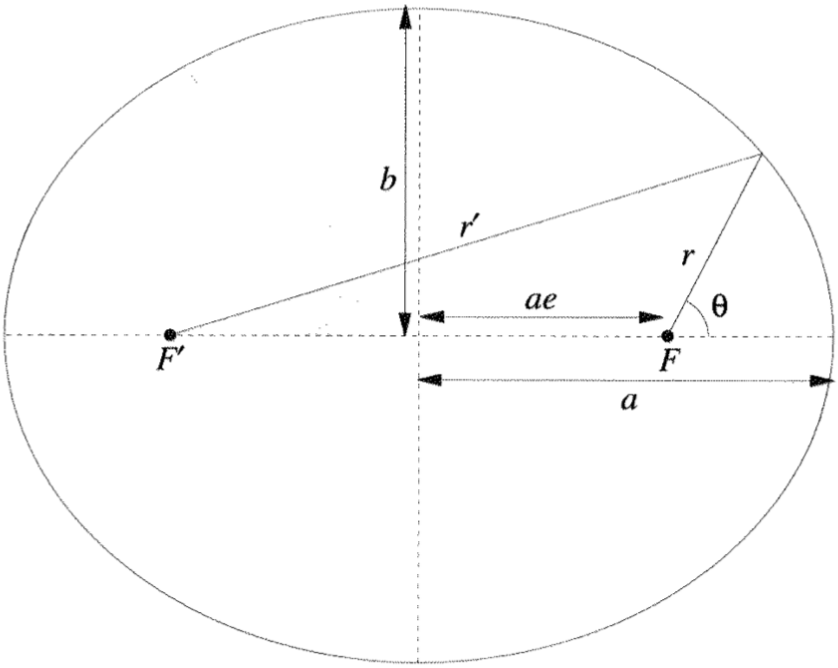

FIGURE 1 – Définitions dans l'ellipse

b) Soit une masse m_1 se déplaçant sur une orbite elliptique autour d'une masse m_2. Calculez l'expression générale de la vitesse radiale v_r et transverse v_θ en fonction de la période P, de l'excentricité e, du demi grand axe a et de l'angle θ.

Conseil : $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ ... Commencez par calculer la vitesse transverse, au moyen de la deuxième loi de Kepler :

$$\frac{dA}{dt} = \left\| \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right\| = \frac{\|\vec{L}\|}{2\mu} = \text{cste}, \tag{6}$$

dans laquelle l'élément d'aire balayée $\mathrm{d}A$ peut donc être exprimé en utilisant cette vitesse. Notez aussi que l'équation (6) peut être intégrée sur une période pour déterminer L, que r est connu par la relation (5), que l'aire d'une ellipse vaut $A = \pi ab$, et qu'on peut facilement montrer (n'est-ce pas ?), par le théorème de Pythagore, que $e^2 = 1 - b^2/a^2$.

c) Reprenant les expressions pour v_r et v_θ, vérifiez l'équation

$$v^2 = G(m_1 + m_2) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \tag{7}$$

Exercice 2 : Orbite de la comète de Halley

Les orbites des comètes ont une très grande excentricité qui peut dans certains cas être proche de l'unité. La comète de Halley a une période orbitale de 76 ans et une excentricité $e = 0.9673$.

a) Exprimez la troisième loi de Kepler

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} \tag{8}$$

en unités astronomiques, masse solaire et année.

b) Calculez le demi-grand axe de l'orbite de la comète de Halley.

c) Calculez la masse du Soleil à partir des caractéristiques orbitales de la comète.

d) Quelle est la distance entre la comète de Halley et le Soleil au périhélie et à l'aphélie ?

e) Quel est le rapport des énergies cinétiques de la comète au périhélie et à l'aphélie ?

Indication : utilisez les équations de l'exercice précédant sur les ellipses et lois de Kepler :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{9}$$

$$v^2 = G(m_1+m_2)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{10}$$