

Série 4: Enoncé

Laboratoire d'Astrophysique <http://lastro.epfl.ch>
 Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
 Semestre de printemps 2019

Exercice 1 : Résolution angulaire

Le rayon du Soleil vaut $R_{\odot} = 6.955 \times 10^8$ m. Si vous observez une étoile semblable au Soleil avec un télescope de 8 m de diamètre (p. ex. le Very Large Telescope), en négligeant les effets de l'atmosphère terrestre, dans le domaine des longueurs d'onde visibles ($\lambda \simeq 5'000$ Å), jusqu'à quelle distance serez-vous capable de résoudre l'étoile? Même question pour une étoile supergéante rouge (type spectral K ou M, voir la table à la fin du polycopié)?

Exercice 2 : Fonction de Planck

Nous rencontrons souvent la fonction de Planck sous deux formes, l'une en unité de fréquence :

$$B_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad [B_{\nu}] = \text{W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1} \quad (1)$$

et l'autre en unité de longueur d'onde :

$$B_{\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \quad [B_{\lambda}] = \text{W m}^{-2} \text{ m}^{-1} \text{ sr}^{-1}. \quad (2)$$

a) Vérifiez $\int_0^{\infty} B_{\nu} d\nu = - \int_0^{\infty} B_{\lambda} d\lambda$. Utilisez l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{u^3}{e^u - 1} du = \frac{\pi^4}{15}. \quad (3)$$

b) Dérivez la loi de Stefan-Boltzman ($F = \sigma T^4$) en intégrant la fonction de Planck sur toutes les longueurs d'onde ou fréquences ($F = \iint B_z \cos \theta d\Omega dz$).

c) Calculez le pic de radiation (loi de déplacement de Wien) de la fonction de Planck par unité de longueur d'onde B_{λ} . Vous serez amenés à résoudre numériquement l'équation :

$$5(1 - e^{-y}) - y = 0. \quad (4)$$

La solution est $y \simeq 4.965$.

- d) Calculez le pic de radiation de la fonction de Planck par unité de fréquence B_ν . Vous serez amenés à résoudre numériquement l'équation :

$$3(1 - e^{-x}) - x = 0. \quad (5)$$

La solution est $x \simeq 2.821$.

- e) Pourquoi les deux résultats précédents ne coïncident-ils pas? Qu'est-ce que cela exprime?