

Corrigé : Loi de Saha, milieu partiellement ionisé

Comme point de départ, nous considérons que l'hydrogène est totalement ionisé et que l'hélium n'est pas ionisé. Cela implique $X_1 = 1$ et $X_2 = X_3 = 0$. En remplaçant ces valeurs dans la dernière équation du système des quatre équations couplées, nous trouvons $E=0.9$.

La suite du problème consiste à utiliser cette première estimation de E pour évaluer X_1, X_2, X_3 à partir des équations (1), (2) et (3) du système. Pour cela nous aurons calculé auparavant la pression que nous substituerons ensuite dans les expressions de K_1, K_2, K_3 . Ces valeurs seront remplacées dans le système pour estimer X_1, X_2, X_3 . Ainsi, nous pourrions obtenir une nouvelle estimation de E en réinsérant leur valeurs dans l'équation (4) du système et itérer jusqu'à obtenir la solution (X_1, X_2, X_3, E) du système de quatre équations.

Calculons tout d'abord le poids moléculaire moyen de la matière neutre étant donné la composition du milieu, soit $\nu_1 = 0.9$ (H) et $\nu_2 = 0.1$ (He). Il faut d'abord convertir les abondances numériques en abondances en masse, car ce sont ces dernières qui interviennent dans la définition du poids moléculaire moyen :

$$X_{m1} = \frac{\nu_1 m_H}{\nu_1 m_H + \nu_2 m_{He}} = 0.6938 ; X_{m2} = \frac{\nu_2 m_{He}}{\nu_1 m_H + \nu_2 m_{He}} = 0.3062$$

avec $m_H = 1.0079$ UMA et $m_{He} = 4.0026$ UMA. Ces proportions sont assez typiques des étoiles, à l'absence de "métaux" (éléments plus lourds que l'hélium) près. Le poids moléculaire moyen des atomes est alors

$$\frac{1}{\mu_0} = \frac{0.6938}{1.0079} + \frac{0.3062}{4.0026} = 0.7649. \quad (1)$$

Nous pouvons alors insérer sa valeur dans l'expression de la pression P avec les autres données. Avec $T = 12500$ K, $\rho = 10^{-10}$ g cm⁻³ et $\frac{1}{\mu_0} = 0.7649$ (les conditions sont à peu près celles de l'atmosphère d'une supergéante), on part avec $E = 0.9$ (donc $\alpha = 2.111$), $X_1 = 1$, $X_2 = 0$ et $X_3 = 0$.

1. La première itération donne $P = 15.1$ Pa, et

$$\begin{array}{ll} K_1 = 126.9 & X_1 = 0.9963 \\ K_2 = 1.883 \times 10^{-2} & X_2 = 3.823 \times 10^{-2} \\ K_3 = 4.423 \times 10^{-15} & X_3 = 3.570 \times 10^{-16} \\ E = 0.9005 & \alpha = 2.1105 \end{array}$$

2. La deuxième itération donne

$$\begin{array}{ll} K_1 = 126.9 & X_1 = 0.9963 \\ K_2 = 1.882 \times 10^{-2} & X_2 = 3.821 \times 10^{-2} \\ K_3 = 4.422 \times 10^{-15} & X_3 = 3.566 \times 10^{-16} \\ E = 0.9005 & \alpha = 2.1105 \end{array}$$

La convergence est ici très rapide. L'hydrogène est presque totalement ionisé (seul un tiers de pourcent est neutre), il y a près de 4% d'hélium une fois ionisé et pratiquement pas d'hélium deux fois ionisé.