Corrigé : Gaz dégénérés

1. La quantité de mouvement s'écrit

$$p = m\,v = \gamma\, m_0\, v \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

On voit alors aisément que

$$\begin{aligned} v &= \frac{p}{m_0}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \\ v^2 &= \frac{p^2}{m_0^2} - \frac{p^2}{m_0^2}\frac{v^2}{c^2} \\ \Rightarrow\ v &= \frac{p/m_0}{\left[1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2\right]^{1/2}} \end{aligned}$$

cqfd.

2. On a vu au cours (p. 165 du polycopié) que la pression s'écrit

$$P = \frac{8\pi}{3h^3}\int \frac{(p/m_0)\,p^3\mathrm{d}p}{\left[1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2\right]^{1/2}}$$

et, par le changement de variable $\sinh\theta = \frac{p}{m_0 c}$:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3}\, m_0^4\, c^5 \int_0^{\theta_F} \frac{\sinh^4\theta\, \cosh\theta\, \mathrm{d}\theta}{(1 + \sinh^2\theta)^{1/2}}$$

Le dénominateur de l'intégrant vaut $\cosh\theta$, et il reste donc à intégrer par parties

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_F} \sinh^4\theta\, \mathrm{d}\theta &= \int_0^{\theta_F} \underbrace{\sinh^3\theta}_{u}\ \underbrace{\sinh\theta\, \mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}v} \\ &= \sinh^3\theta\, \cosh\theta\Big|_0^{\theta_F} - 3\int_0^{\theta_F} \cosh^2\theta\, \sinh^2\theta\, \mathrm{d}\theta \\ &= \sinh^3\theta_F\, \cosh\theta_F - \frac{3}{4}\int_0^{\theta_F} \sinh^2(2\theta)\, \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

car $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et donc $\sinh(2x) = 2\,\sinh x\,\cosh x$, $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$. Il s'agit maintenant de trouver ce que vaut le second terme du membre de droite de cette équation, à savoir $\int \sinh^2(2\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Posons $x = 2\theta$, $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}\theta$; on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\theta_F} \sinh^2(2\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{x_F} \sinh^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{x_F} \underbrace{\sinh x}_{u}\ \underbrace{\sinh x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sinh x\ \cosh x|_0^{x_F} - \int \underbrace{\cosh^2 x}_{1+\sinh^2 x}\ \mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sinh x_F\ \cosh x_F - \int_0^{x_F} \mathrm{d}x - \int_0^{x_F} \sinh^2 x\,\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{x_F} \sinh^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sinh x_F\ \cosh x_F - \frac{x_F}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{x_F} \sinh^2 x\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow \int_0^{x_F} \sinh^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sinh x_F\ \cosh x_F - \frac{x_F}{2}
\end{aligned}$$

L'intégrale de $\sinh^2(2\theta)$ vaut alors, sachant que $x_F = 2\theta_F$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\theta_F} \sinh^2(2\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{x_F} \sinh^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ \sinh(2\theta_F)\ \cosh(2\theta_F) - \frac{\theta_F}{2} \\
&= \frac{1}{4}\ \sinh(2\theta_F)\ \left[\underbrace{\cosh^2\theta_F}_{1+\sinh^2\theta_F} + \sinh^2\theta_F\right] - \frac{\theta_F}{2} \\
&= \frac{1}{4}\ \sinh(2\theta_F)\ + \frac{1}{2}\ \underbrace{\sinh(2\theta_F)}_{2\sinh\theta_F\ \cosh\theta_F}\ \sinh^2\theta_F - \frac{\theta_F}{2} \\
&= \frac{1}{4}\ \sinh(2\theta_F)\ + \sinh^3\theta_F\ \cosh\theta_F - \frac{\theta_F}{2}
\end{aligned}$$

On peut maintenant écrire l'intégrale de $\sinh^4\theta$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\theta_F} \sinh^4\theta\,\mathrm{d}\theta &= \sinh^3\theta_F\ \cosh\theta_F - \frac{3}{4}\left[\frac{1}{4}\sinh(2\theta_F) + \sinh^3\theta_F\ \cosh\theta_F - \frac{\theta_F}{2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\sinh^3\theta_F\ \cosh\theta_F - \frac{3}{16}\sinh(2\theta_F) + \frac{3}{8}\theta_F
\end{aligned}$$

C'est 8 fois l'intégrale qui nous intéresse, ce qui donne la fonction $f(x)$, compte tenu du changement de variable $x = \sinh\theta_F$ (lequel implique $\cosh\theta_F = \sqrt{1+x^2}$, $\theta_F = \arg\sinh x = \ln|x+\sqrt{1+x^2}|$ et $\sinh(2\theta_F) = 2\sinh\theta_F\ \cosh\theta_F = 2x\,(1+x^2)^{1/2}$) :

$$\begin{aligned}
8\int_0^{\theta_F} \sinh^4\theta\,\mathrm{d}\theta &= 2x^3\left(1+x^2\right)^{1/2} - 3x\left(1+x^2\right)^{1/2} + 3\underbrace{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}_{\arg\sinh x} \\
f(x) &= x\left(x^2+1\right)^{1/2}\left(2x^2-3\right) + 3\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)
\end{aligned}$$

On a donc bien, finalement,

$$P = \frac{\pi\, m_0^4\, c^5}{3\, h^3}\, f(x)$$

Autre méthode : On peut utiliser la définition des sinh et cosh, et intégrer des exponentielles, puis retranscrire les résultats en termes de fonctions hyperboliques. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\theta_F} \sinh^4\theta \mathrm{d}\theta &= \frac{1}{16}\int_0^{\theta_F}\left(e^x - e^{-x}\right)^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int_0^{\theta_F}\left(e^x - e^{-x}\right)^2\left(e^x - e^{-x}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16}\int_0^{\theta_F}\left(e^{4x} + e^{-4x} - 4\,e^{2x} - 4\,e^{-2x} + 6\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16}\left[\int_0^{\theta_F} e^{4x}\mathrm{d}x + \int_0^{\theta_F} e^{-4x}\mathrm{d}x - 4\int_0^{\theta_F} e^{2x}\mathrm{d}x - 4\int_0^{\theta_F} e^{-2x}\mathrm{d}x + 6\int_0^{\theta_F}\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{e^{4\theta_F}-1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-4\theta_F}-1}{4}\right) - \left(e^{2\theta_F}-1\right) + \left(e^{-2\theta_F}-1\right) + 3\,\theta_F\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{e^{4\theta_F}-1}{2} - \frac{e^{-4\theta_F}-1}{2}\right) - \left(e^{2\theta_F} - e^{-2\theta_F}\right) + 3\,\theta_F\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sinh(4\theta_F) - 2\sinh(2\theta_F) + 3\,\theta_F\right]
\end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser les propriétés des fonctions hyperboliques, notamment :

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x) \quad ; \quad \cosh(2x) = 1 + 2\sinh^2 x$$

pour modifier le premier terme

$$\begin{aligned}
\sinh(4\theta_F) &= 2\sinh(2\theta_F)\cosh(2\theta_F) \\
&= 4\sinh\theta_F\cosh\theta_F\,(1 + 2\sinh^2\theta_F) \\
&= 4\sinh\theta_F\cosh\theta_F + 8\sinh^3\theta_F\cosh\theta_F \\
&= 2\sinh(2\theta_F) + 8\sinh^3\theta_F\cosh\theta_F
\end{aligned}$$

et pour obtenir finalement

$$\begin{aligned}
\int_0^{\theta_F}\sinh^4\theta\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{8}\left[2\sinh^3\theta_F\cosh\theta_F + \frac{1}{2}\sinh(2\theta_F) - 2\sinh(2\theta_F) + 3\,\theta_F\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[2\sinh^3\theta_F\cosh\theta_F - \frac{3}{2}\sinh(2\theta_F) + 3\,\theta_F\right]
\end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression précédente.

3. L'équation de l'équilibre hydrostatique donne :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{G}M_r}{r^2}\rho$$

En approximation zéro, on supposera que :

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} &= \tfrac{P(R)-P_c}{R-0} = -\tfrac{P_c}{R} \\
\rho &= \bar{\rho} = \tfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\frac{P_c}{R} = \frac{\mathrm{G}M}{R^2}\frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3\mathrm{G}}{4\pi}\frac{M^2}{R^5} \qquad \Rightarrow \qquad P_c = \frac{3}{4\pi}\frac{\mathrm{G}M^2}{R^4}$$

Remarquer au passage qu'on retrouve une fois de plus la dépendance en $\frac{\mathrm{G}M^2}{R^4}$. De l'équation d'état d'un gaz d'électrons dégénérés non relativistes, il vient :

$$P_e = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3} \simeq K_1 \left(\frac{3M}{4\pi\mu_e R^3}\right)^{5/3}$$

En identifiant la pression électronique ci-dessus avec la pression centrale obtenue plus haut :

$$K_1 \left(\frac{3}{4\pi\mu_e}\right)^{5/3} \frac{M^{5/3}}{R^5} = \frac{3}{4\pi}\frac{\mathrm{G}M^2}{R^4} \qquad \Rightarrow \qquad R \propto M^{-1/3}$$

c'est-à dire que le rayon **diminue** quand la masse croît !

4. **Première méthode :** On peut considérer que la dégénérescence est levée lorsque l'énergie thermique est supérieure à l'énergie de Fermi, $kT > E_\mathrm{F}$. Or on a, dans le cas d'un gaz totalement dégénéré (p. 163 du polycopié)

$$E_\mathrm{F} = \frac{p_\mathrm{F}^2}{2m_\mathrm{e}} \quad \text{et} \quad p_\mathrm{F} = \left(\frac{3h^3}{8\pi}\frac{\rho}{\mu_\mathrm{e} m_\mathrm{H}}\right)^{1/3}$$

Par conséquent, il faut que

$$T > \frac{h^2}{2m_\mathrm{e}k} \left(\frac{3\,\rho}{8\pi\,\mu_\mathrm{e} m_\mathrm{H}}\right)^{2/3} = 0.66 \cdot 10^6 \text{ K}$$

On a utilisé $\rho = 7$ g cm^{-3}, les constantes
— $h = 6.626 \cdot 10^{-27}$ erg s
— $m_\mathrm{H} = 1.67 \cdot 10^{-24}$ g
— $m_\mathrm{e} = 9.11 \cdot 10^{-28}$ g
— $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg K^{-1}
et le fait que, pour le fer pur, le poids moléculaire moyen électronique est donné par

$$\frac{1}{\mu_\mathrm{e}} = \sum_i \frac{X_i}{A_i} E_i = \frac{1}{56} \times 26 = 0.464 \quad \Rightarrow \quad \mu_\mathrm{e} = 2.15$$

La température nécessaire pour lever la dégénérescence s'élève donc à près d'un million de degrés.
Deuxième méthode : On cherche la densité ρ pour laquelle $\psi \sim 0$. En prenant la formule de la dégénérescence partielle (p. 161 du cours), on a

$$\rho = \frac{4\pi}{h^3}(2\,m_\mathrm{e}\,kT)^{3/2}\,\mu_\mathrm{e} m_\mathrm{H}\,F_{1/2}(\psi)$$

d'où l'on tire immédiatement

$$T = \frac{h^2}{2\,m_\mathrm{e}\,k} \left(\frac{\rho}{4\pi\,\mu_\mathrm{e} m_\mathrm{H}\,F_{1/2}(0)}\right)^{2/3}$$

On a et $F_{1/2}(0) = 0.678$ (voir la table dans le fichier des "slides" du cours du 10.12.2018), si bien que

$$T = 0.65 \cdot 10^6 \text{ K}$$

qui coïncide bien avec le résultat précédent.

LASTRO-EPFL, automne 2018 — Sauverny, le 6 décembre 2018