Corrigé: Transfert

Transfert convectif: transformations adiabatiques

1. Partons de l'équation (4), en substituant $\mathrm{d}T$ donné par (6). On obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}p &= \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T \mathrm{d}V + \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V \left(\left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_V \mathrm{d}p + \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_p \mathrm{d}V \right) \\
&= \left(\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T + \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_p \right) \mathrm{d}V + \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V \left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_V \mathrm{d}p
\end{aligned}$$

Comme il s'agit d'une identité, ce qui multiplie $\mathrm{d}V$ doit être nul, donc:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T = - \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_p \tag{1}$$

et la première relation est prouvée; (le coefficient de $\mathrm{d}p$ vaut 1). Pour la seconde relation, on raisonne de même en introduisant (5) dans (4):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}p &= \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T \left(\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T \mathrm{d}p + \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p \mathrm{d}T \right) + \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V \mathrm{d}T \\
&= \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T \mathrm{d}p + \left(\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p + \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V \right) \mathrm{d}T \;\Rightarrow\; \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T = 1
\end{aligned}$$

2. Pour trouver l'expression de h, on soustrait (1) à (2), ce qui donne:

$$\begin{aligned}
0 &= (C_p - C_V)\,\mathrm{d}T + h\,\mathrm{d}p - l\,\mathrm{d}V \\
0 &= (C_p - C_V) \left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_V + h - l \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_V}_{=0} \;\Rightarrow\quad h = -(C_p - C_V) \left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_V
\end{aligned}$$

Pour trouver l, on procède de même, en divisant par $\mathrm{d}V$ au lieu de $\mathrm{d}p$:

$$0 = (C_p - C_V) \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_p + h \underbrace{\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_p}_{=0} - l \quad\Rightarrow\quad l = (C_p - C_V) \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_p$$

Pour trouver λ, on égalise les membres de droite des équations (1) et(3), puis on divise par dp:

$$\begin{aligned}
C_V\,\mathrm{d}T + l\,\mathrm{d}V &= \lambda\,\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}V \\
C_V\,\left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_V + l\,\underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_V}_{=0} &= \lambda + \mu\,\underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_V}_{=0} \Rightarrow \quad \lambda = C_V\,\left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_V
\end{aligned}$$

Pour trouver μ, on fait de même avec les équations (1) et(3), et on divise par dV:

$$\begin{aligned}
\lambda\,\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}V &= C_p\,\mathrm{d}T + h\,\mathrm{d}p \\
\lambda\,\underbrace{\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_p}_{=0} + \mu &= C_p\,\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_p + h\,\underbrace{\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_p}_{=0} \Rightarrow \quad \mu = C_p\,\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_p
\end{aligned}$$

3. Le calcul est très simple:

$$\begin{aligned}
pV = RT \quad \Rightarrow \quad T &= \frac{pV}{R} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_V = \frac{V}{R} \\
\Rightarrow \quad h &= -(C_p - C_V)\frac{V}{R} \\
\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_p = \frac{p}{R} \quad \Rightarrow \quad l &= (C_p - C_V)\frac{p}{R}
\end{aligned}$$

Les résultats ci-dessus permettent d'écrire immédiatement:

$$\lambda = C_V\,\frac{V}{R} \quad ; \quad \mu = C_p\,\frac{p}{R}$$

Partons des équations (1) et (2) où l'on a posé $\delta Q = 0$ (transformation adiabatique), et divisons la seconde par la première:

$$\begin{aligned}
0 = C_V\,\mathrm{d}T + l\,\mathrm{d}V \quad &\Rightarrow \quad C_V\,\mathrm{d}T = -l\,\mathrm{d}V \\
0 = C_p\,\mathrm{d}T + h\,\mathrm{d}p \quad &\Rightarrow \quad C_p\,\mathrm{d}T = -h\,\mathrm{d}p \\
\Rightarrow \quad \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_{ad}\frac{h}{l} &= \frac{C_p}{C_V} \\
\Rightarrow \quad \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_{ad} &= \frac{C_p}{C_V}\,\frac{l}{h}
\end{aligned}$$

En remplaçant l et h par les expressions trouvées ci-dessus, et le rapport C_p/C_V par γ, on a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial V} &= -\gamma\,\frac{C_p - C_V}{C_p - C_V}\,\frac{p}{V} = -\gamma\,\frac{p}{V} \\
\Rightarrow \quad \frac{\partial p}{p} &= -\gamma\,\frac{\partial V}{V} \quad \Rightarrow \quad \ln p + \gamma\,\ln V = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad p\,V^\gamma = \text{const}
\end{aligned}$$