Corrigé: Profils de raies, opacité continues

1. Profil Doppler des raies

1. Chaque atome absorbe (ou émet) à la fréquence ν_0 dans son propre référentiel, mais à la fréquence $\nu = \nu_0\,(1+v_x/c)$ dans le référentiel de l'observateur, à cause de l'effet Doppler et de sa vitesse thermique, dont la composante sur la ligne de visée est v_x.

   Le gaz est supposé en ETL, si bien que la distribution des vitesses est maxwellienne. On tire de la formule de l'effet Doppler que

$$v_x = c\left(\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}\right) \quad ; \quad dv_x = \frac{c}{\nu_0}\,d\nu \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dN_x}{N} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m}{2kT}}\,\frac{c}{\nu_0}\,e^{-\frac{mc^2}{2kT\nu_0^2}(\nu-\nu_0)^2}\,d\nu \tag{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\mathrm{D}}}\right)^2}\,\frac{d\nu}{\Delta\nu_{\mathrm{D}}} \tag{3}$$

   avec $\Delta\nu_{\mathrm{D}} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{2kT/m}$ et $\Delta\nu = \nu - \nu_0$.

   Si on néglige la largeur naturelle de la raie, on peut écrire

$$\frac{dN_x}{N} = \frac{I_\nu\,d\nu}{I} \quad \text{avec} \quad I = \int_{raie} I_\nu\,d\nu \tag{4}$$

   et on a bien l'égalité proposée.

2. On néglige la vitesse de microturbulence, on a donc

$$\Delta\nu_{\mathrm{D}} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{2kT/m} \Rightarrow \Delta\lambda_{\mathrm{D}} = \frac{c}{\nu_0^2}\,\Delta\nu_{\mathrm{D}} = \frac{\lambda_0^2}{c}\,\Delta\nu_{\mathrm{D}} = \frac{\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT}{56\,m_H}} \tag{5}$$

   en tenant compte du fait que le noyau de fer a une masse $m = 56\,m_H$. Avec $T = 5700\,\mathrm{K}$, $\lambda_0 = 5000\,\text{Å}$ et les constantes

$$k = 1.381\times10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}} \tag{6}$$

$$m_H = 1.67\times10^{-27}\ \mathrm{Kg} \tag{7}$$

$$c = 2.998\times10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}} \tag{8}$$

   on obtient finalement $\Delta\lambda_{\mathrm{D}} = 0.022\,\text{Å}$.

3. La masse m qui intervient dans la formule de $\Delta\lambda_{\mathrm{D}}$ ou de $\Delta\nu_{\mathrm{D}}$ est celle de l'atome ou ion qui absorbe ou émet, et vaut donc $m = Am_H$ avec A la masse atomique. Comme $\Delta\lambda_{\mathrm{D}} \propto 1/\sqrt{m}$, les éléments lourds ont des raies plus étroites que les éléments légers.

2. Diffusion de Rayleigh, de Thomson

1. **Diffusion Rayleigh:** Loin de la résonance, on a $|\nu - \nu_0| >> \gamma\nu$, si bien que l'expression de n' devient:

$$n' \simeq \frac{Ne^2}{2m_e} \frac{\nu\,\gamma/2\pi}{\left(\nu_0^2 - \nu^2\right)^2 + \nu^2\left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2} \approx \frac{Ne^2}{2m_e} \frac{\nu\,\gamma/2\pi}{\left(\nu_0^2 - \nu^2\right)^2} \tag{9}$$

   En introduisant l'expression $\gamma = \frac{8\pi^2\,e^2\nu^2}{3m_ec^3}$, on obtient

$$n' \approx \frac{2}{3}\frac{Ne^4}{m_e^2c^3} \frac{\nu^3}{\left(\nu_0^2 - \nu^2\right)^2} \Rightarrow \quad \kappa_\nu\rho = \frac{4\pi\nu n'}{c} \simeq \frac{8\pi Ne^4}{m_e^2c^4}\left[\left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 - 1\right]^{-2} \tag{10}$$

   Sous l'hypothèse d'un électron fortement lié à l'atome: $\nu_0 >> \nu$, on a bien

$$\kappa_\nu\rho \simeq \frac{8\pi Ne^4}{m_e^2c^4}\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^4 \propto \left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 \tag{11}$$

2. **Diffusion Thomson:** En partant de l'équation 10, on fait cette fois l'hypothèse d'un électron faiblement lié à l'atome, $\nu_0 << \nu$. L'opacité tend ainsi vers une constante:

$$\kappa_\nu\rho \simeq \frac{8\pi Ne^4}{3m_e^2c^4} \tag{12}$$