

Corrigé : Lois de Boltzmann et Saha

1. La table suivante recense tous les niveaux pour $n = 1$ à 3.

n	l	m_l	m_s	n	l	m_l	m_s
1	0	0	$\pm 1/2$	3	0	0	$\pm 1/2$
				3	1	1	$\pm 1/2$
2	0	0	$\pm 1/2$	3	1	0	$\pm 1/2$
2	1	1	$\pm 1/2$	3	1	-1	$\pm 1/2$
2	1	0	$\pm 1/2$	3	2	2	$\pm 1/2$
2	1	-1	$\pm 1/2$	3	2	1	$\pm 1/2$
				3	2	0	$\pm 1/2$
				3	2	-1	$\pm 1/2$
				3	2	-2	$\pm 1/2$

On voit que la loi est vérifiée pour les 3 premiers niveaux, puisque g_n vaut respectivement 2, 8 et 18. En mécanique quantique, on décrit l'état de l'atome d'hydrogène par une fonction $|\psi_{nlm}\rangle \otimes |\psi_S\rangle$. On sait que chaque niveau n est dégénéré $(2l+1)$ fois pour la composante spatiale, et $(2S+1) = 2\frac{1}{2}+1 = 2$ fois pour la composante du spin. On peut alors attribuer un poids statistique g_n à chaque niveau n d'énergie E_n en fonction de sa dégénérescence; en posant $l' = n - l - 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 g_n &= 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) + \sum_{l'=n-1}^0 (2l'+1) \\
 &= \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) + (2(n-1-l)+1) \\
 &= \sum_{l=0}^{n-1} 2n = 2n^2
 \end{aligned}$$

Une autre méthode consiste à poser $k = l + 1$:

$$\begin{aligned}
 g_n &= 2 \sum_{k=1}^n (2k-1) = 4 \underbrace{\sum_{k=1}^n k}_{n(n+1)/2} - 2n \\
 &= 2n(n+1) - 2n = 2n^2
 \end{aligned}$$

2. L'expression de la fonction de partition est

$$U = \sum_n g_n e^{-\chi_n/kT}$$

Par ailleurs, on a $g_n = 2n^2$ et $\chi_n = E_n - E_1$. Or le modèle de l'atome de Bohr nous permet d'approximer l'énergie E_n par :

$$E_n \simeq -\frac{\chi_{HI}}{n^2}$$

où $\chi_{HI} = 13.6$ eV est le potentiel d'ionisation de l'hydrogène. Ceci implique que $\chi_n = (1 - \frac{1}{n^2}) \cdot \chi_{HI}$ d'où on déduit $0 < \chi_n < \chi_{HI}$. Par conséquent, on a :

$$e^{-\chi_n/kT} > e^{-\chi_{HI}/kT} > \epsilon$$

où ϵ est un nombre fini et positif. Il vient finalement :

$$U > \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \epsilon \rightarrow \infty$$

La série ne converge pas !

La solution du paradoxe réside, qualitativement, dans le fait que les atomes excités sont spatialement très étendus : la présence des électrons libres abaissent l'énergie du continu. Ainsi les atomes seront ionisés plus facilement et certains niveaux d'excitation n ne seront plus accessibles aux électrons, puisqu'ils auront quitté l'atome avant d'atteindre l'énergie E_n . Par conséquent la fonction de partition est tronquée à un certain $n < \infty$.

La taille "effective" des atomes est liée à l'effet d'écran produit par les électrons libres¹. Ces effets peuvent être estimés en fonction de la température du gaz, si bien que les fonctions de partition sont calculables ; en pratique, on utilise des tables et des approximations polynomiales.

3. Commençons par définir les grandeurs suivantes :

- N le nombre total d'atomes d'hydrogène (dans les états fondamentaux + excités + ionisés),

1. voir par exemple Shu F.H., 1991, The physics of astrophysics, Vol. 1, pp. 62-63

- N_n le nombre d'atomes d'hydrogène dans les états excités (dégénérés) de niveau n ,
 - N_I le nombre d'atomes d'hydrogène neutre (H),
 - N_{II} le nombre d'atomes d'hydrogène ionisés (H^+).
- On a donc par définition :

$$N = N_I + N_{II} \quad \text{et} \quad N_I = \sum_{n=1}^{\infty} N_n$$

Écrivons alors la relation suivante :

$$\frac{N_2}{N} = \frac{N_2}{N_I + N_{II}} = \frac{(N_2/N_I)}{1 + (N_{II}/N_I)}$$

Ainsi pour étudier le comportement de N_2/N en fonction de la température T , il faut écrire les fractions (N_2/N_I) et (N_{II}/N_I) comme des fonctions de T . Ceci peut se faire à l'aide des lois de Boltzmann et Saha. Commençons par expliciter la première fraction.

De la physique statistique, nous retenons que dans un ensemble de N_I particules toutes identiques, sans interactions mutuelles et en équilibre, le nombre N_n de particules ayant une énergie E_n est donné par la loi de Boltzmann :

$$\frac{N_n}{N_I}(T) = \frac{g_n \exp(-(E_n - E_1)/kT)}{U_I(T)}$$

où E_1 est l'énergie du niveau fondamental. On a vu précédemment que $g_n = 2n^2$ et qu'on pouvait approximer l'énergie $E_n \simeq -\chi_{HI}/n^2$. On obtient donc le potentiel d'excitation du deuxième niveau de l'atome d'hydrogène :

$$\chi_2 = (E_2 - E_1) \simeq -\chi_{HI} \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right) \simeq 10.2 \text{ eV}$$

Finalement, on parvient à obtenir une expression de (N_2/N_I) en fonction de la température $T[\text{K}]$:

$$\log\left(\frac{N_2}{N_I}(T)\right) = -5040 \frac{10.2}{T} + 0.60$$

Faisons de même pour le rapport (N_{II}/N_I). De la loi de Saha, on a :

$$\frac{N_{II}}{N_I}(T) = \frac{2}{P_e} \frac{U_{II}}{U_I} \left(\frac{\sqrt{2\pi m_e}}{h} \right)^3 (kT)^{5/2} \exp(-\chi_{HI}/kT)$$

D'après les valeurs numériques des différentes grandeurs (en particulier, $P_e = 100 \text{ dyne cm}^{-2}$), on obtient une expression de (N_{II}/N_I) en fonction de T [K] :

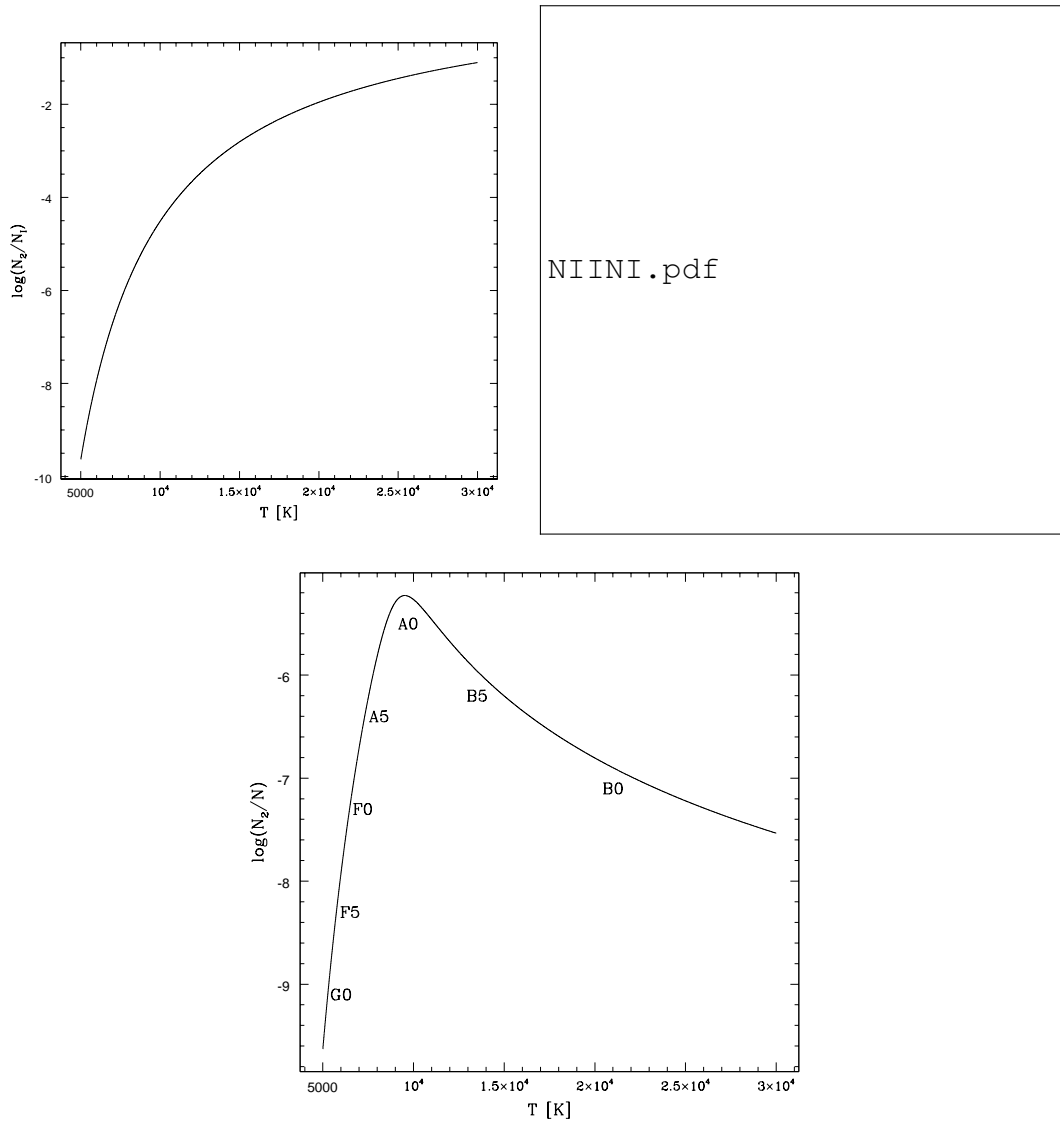
$$\log \left(\frac{N_{II}}{N_I}(T) \right) = -5040 \frac{13.6}{T} + 2.5 \log(T) - 2.48$$

Ce qui permet finalement d'exprimer (N_2/N) en fonction de T . On représente ces fonctions dans la figure 1. Les graphiques présentés dans cette figure suggèrent quelques remarques :

- plus le niveau $n = 2$ sera peuplé (i.e. forte valeur de N_2/N), plus les raies (en absorption) de Balmer seront prononcées. Le graphique donnant (N_2/N)(T) est donc un indicateur de l'intensité des raies de Balmer en fonction de T ,
 - une étoile froide aura une forte majorité de ces atomes d'hydrogène dans l'état fondamental ($N_2 \ll N_1 < N$), d'où des raies de Balmer peu marquées,
 - une étoile très chaude aura une forte majorité de ces atomes d'hydrogène ionisés ($N > N_{II} \gg N_I > N_2$), d'où des raies de Balmer peu marquées.
 - les raies de Balmer seront les plus marquées pour les étoiles de types spectraux proches de A0.
4. On considère deux étoiles du type spectral G5, mais de luminosité différente, i.e. l'une G5V (naine) et l'autre G5III (géante). On souhaite calculer l'ionisation du Fe et du Sr. De la loi de Saha, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{Fe_{II}}{FeI} &= \frac{2}{P_e} \frac{U_{FeII}}{U_{FeI}} \left(\frac{\sqrt{2\pi m_e}}{h} \right)^3 (kT)^{5/2} \exp(-\chi_{FeI}/kT) \\ \frac{Sr_{II}}{SrI} &= \frac{2}{P_e} \frac{U_{SrII}}{U_{SrI}} \left(\frac{\sqrt{2\pi m_e}}{h} \right)^3 (kT)^{5/2} \exp(-\chi_{SrI}/kT) \end{aligned}$$

FIGURE 1 – Les rapports (N_2/N_I) , (N_{II}/N_I) et (N_2/N) en fonction de T .



D'après les valeurs de la donnée on obtient :

$$\left(\frac{FeII}{FeI}\right)_{G5V} = 4.023 \quad \left(\frac{FeII}{FeI}\right)_{G5III} = 4.580$$

$$\left(\frac{SrII}{SrI}\right)_{G5V} = 354.8 \quad \left(\frac{SrII}{SrI}\right)_{G5III} = 808.9$$

ce qui permet de calculer les rapports :

$$\frac{(FeII/FeI)_{G5III}}{(FeII/FeI)_{G5V}} = 1.14 \quad \frac{(SrII/SrI)_{G5III}}{(SrII/SrI)_{G5V}} = 2.28$$

Remarques :

- L'ionisation du Fe est approximativement la même dans les deux étoiles. Par conséquent, les raies d'absorption du Fe doivent environ avoir la même allure dans les deux spectres.
- La proportion des atomes SrII (i.e. ionisé une fois) est environ deux fois plus importante dans l'étoile géante. Ainsi les raies d'absorption du Sr n'auront pas la même allure dans les deux spectres \Rightarrow critère de luminosité.