Cours d'Astrophysique II, Dr. Pascale Jablonka — EPFL

Section de physique 3e année — Série de la semaine No 10

3.12.2018 — Semestre d'automne 2018

Loi de Saha, milieu partiellement ionisé

Soit un mélange d'hydrogène et d'helium où la température vaut $T = 12500$ K et la densité 10^{-7} kg/m^3. On néglige la pression de radiation. Les proportions du mélange sont $\nu_1 = 0.9$ pour l'hydrogène et $\nu_2 = 0.1$ pour l'helium.

Résoudre par itération l'équation (4). Pour ancrer l'itération, partir de l'hypothèse que H est complètement ionisé et He complètement neutre. Les équations pertinentes sont rappelées ci-dessous :

$$X_1^1 = \frac{H^+}{H+H^+} \quad X_2^1 = \frac{He^+}{He+He^++He^{++}} \quad X_2^2 = \frac{He^{++}}{He+He^++He^{++}}$$

$$Y_1^0 = X_1^1 \qquad Y_2^0 = X_2^1 + X_2^2 \qquad Y_2^1 = X_2^2$$

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons les quantités ci-dessus respectivement par : $X_1,\ X_2,\ X_3,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3$. Ainsi,

$$\begin{aligned} E = \sum_i \nu_i\, Y_i &= \nu_1\, X_1 + \nu_2\,(X_2 + X_3) + \nu_2\, X_3 \\ &= \nu_1\, X_1 + \nu_2\,(X_2 + 2X_3) \end{aligned}$$

L'équation de Saha nous donne le rapport

$$\frac{X_1\, P_e}{(1 - X_1) P_g} = K_1 \tag{1}$$

avec

$$K_1 = \frac{(2\pi\, m_e)^{3/2}\ (kT)^{5/2}}{\beta\, P\, h^3}\ \omega_1\ e^{-I_1/kT} \tag{2}$$

$$\text{et} \qquad \omega_1 = 2\,\frac{U_{H^+}}{U_H} \tag{3}$$

L'équation de Saha ainsi écrite néglige les effets des interactions électrostatiques. On a ainsi au total 4 équations

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{X_1}{1-X_1}\,\frac{E}{1+E} & = & K_1 \\ \frac{X_2}{1-X_2-X_3}\,\frac{E}{1+E} & = & K_2 \\ \frac{X_3}{X_2}\,\frac{E}{1+E} & = & K_3 \\ \nu_1\,X_1\,+\nu_2\,(X_2+2\,X_3) & = & E \end{array}\right\} \text{4 équations couplées avec } X_1,\,X_2,\,X_3 \text{ et } E \text{ comme inconnues} \tag{4}$$

Les termes K_i sont définis de la même manière que K_1, avec

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & 13.598\,eV \\ I_2 & = & 24.587\,eV \\ I_3 & = & 54.416\,eV \\ \omega_1 & = & 2\,\frac{U_H^+}{U_H} = 2\,\cdot\,\frac{1}{2} = 1 \\ \omega_2 & = & 2\,\frac{U_{He}^+}{U_{He}} = 2\,\cdot\,\frac{2}{1} = 4 \\ \omega_3 & = & 2\,\frac{U_{He}^{++}}{U_{He}^+} = 2\,\cdot\,\frac{1}{2} = 1 \end{array}$$

Notons enfin que pression et densité sont reliés par la formule :

$$P = \frac{k}{m_H}\frac{1+E}{\mu_0}\rho T, \tag{5}$$

où μ_0 est le poids moléculaire moyen de la matière neutre.

Rappel des valeurs des constantes physiques :
$k = 1.3807 \cdot 10^{-23}$ J/K
$h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s
$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg
$m_H \simeq u = 1.661 \cdot 10^{-27}$ kg

Laboratoire d'Astrophysique de l'EPFL, automne 2017 Sauverny, le 30 novembre 2018