# 2000 $QW_7$: une expérience de parallaxe

Raoul Behrend
Observatoire de Genève
CH-1290 Sauverny
Suisse

raoul.behrend@obs.unige.ch
http://obswww.unige.ch/~behrend

2000-12-21

## Introduction

Bien que fort bien connu, le rayon de la terre exprimé en unité astronomique peut faire l'objet d'un amusant problème d'observation et de réduction.

La mécanique céleste définit l'unité astronomique comme base des distances pour le calcul des mouvements dans le système solaire. La terre a été arpentée pour en mesurer la forme et les dimensions. Comment relier ces deux échelles ?

Le jeu est simple: en disposant d'éphémérides approximatives, il faut retrouver le rayon de la Terre exprimé en unité astronomique (ou l'inverse). Le facteur entre ces deux échelles est défini comme $\frac{1\,r_{Terre}}{1\,UA} \doteq \sin\bar{p}$ où $\bar{p}$ est souvent noté $\pi_0$.

Pour cela, au minimum deux observateurs sont nécessaires, ainsi que des observations simultanées. Les objets du système solaire, de distances connues, étant vus sous des directions différentes, il est possible de faire de la stéréoscopie pour déterminer la base entre les observateurs.

## Méthode de dépouillement

Le passage des coordonnées géocentriques $\begin{matrix}\alpha_o\\ \delta_o\end{matrix}$ aux coordonnées topocentriques $\begin{matrix}\alpha_t\\ \delta_t\end{matrix}$ des observateurs se fait à l'aide de $\begin{matrix}\alpha_t=\alpha_o+\Delta\alpha\\ \delta_t=\delta_o+\Delta\delta\end{matrix}$ où

$$\Delta\alpha=-\arctan\frac{r\cos\psi\frac{\sin\bar{p}}{R}\sin H}{\cos\delta_o-r\cos\psi\frac{\sin\bar{p}}{R}\cos H}$$

$$\Delta\delta=\arctan\frac{\left(\sin\delta_o-r\sin\psi\frac{\sin\bar{p}}{R}\right)\cos\Delta\alpha}{\cos\delta_o-r\cos\psi\frac{\sin\bar{p}}{R}\cos H}-\delta_o$$

selon les formules développées en appendice. $\begin{matrix}\alpha_o\\ \delta_o\end{matrix}$ sont les coordonnées tirées des éphémérides pour l'instant observé. $H$ est l'angle horaire pour l'observateur de longitude $\lambda$ et de coordonnées radiale $r\cos\psi$ et verticale $r\sin\psi$ (afin de limiter les doutes possibles, la latitude géocentrique est notée $\psi$ au lieu de $\varphi^I$). $R$ est la distance de l'objet au centre de la terre, en unité astronomique, et $\bar{p}$ est la parallaxe correspondante à une unité astronomique ($8{,}794''$). Si l'observateur n'a pas tout-à-fait pris le cliché au temps convenu, le mouvement propre de l'astéroïde devra être pris en compte: $\begin{matrix}\dot{\alpha}_o\Delta T\\ \dot{\delta}_o\Delta T\end{matrix}$. La positon prédite de l'astéroïde sera donc donnée par $\begin{matrix}\alpha_t=\alpha_o+\dot{\alpha}_o\Delta T+\Delta\alpha\\ \delta_t=\delta_o+\dot{\delta}_o\Delta T+\Delta\delta\end{matrix}$. En fait, pour ce problème, on doit voir les dépendances fonctionnelles $\begin{matrix}\Delta\alpha=\Delta\alpha(\bar{p})\\ \Delta\delta=\Delta\delta(\bar{p})\end{matrix}$. Si l'observateur est seul, il doit disposer d'éphémérides très précises, vu qu'il devra retrouver $\bar{p}$ via une analyse de ses observations avec $\begin{matrix}\alpha_t-\alpha_o=\dot{\alpha}_o\Delta T+\Delta\alpha(\bar{p})\\ \delta_t-\delta_o=\dot{\delta}_o\Delta T+\Delta\delta(\bar{p})\end{matrix}$. Si l'on dispose d'observations presque simultanées de lieux distincts, on peut se passer de la très haute précision pour les éphémérides (et donc utiliser un logiciel ordinaire et/ou une orbite pas trop soignée) en considérant comme des observations les écarts entre les positions topocentriques: $\begin{matrix}(\alpha_t^{II}-\alpha_o)-(\alpha_t^{I}-\alpha_o)=\alpha_t^{II}-\alpha_t^{I}=\dot{\alpha}_o(\Delta T^{II}-\Delta T^{I})+(\Delta\alpha^{II}(\bar{p})-\Delta\alpha^{I}(\bar{p}))\\ (\delta_t^{II}-\delta_o)-(\delta_t^{I}-\delta_o)=\delta_t^{II}-\delta_t^{I}=\dot{\delta}_o(\Delta T^{II}-\Delta T^{I})+(\Delta\delta^{II}(\bar{p})-\Delta\delta^{I}(\bar{p}))\end{matrix}$. Les indices supérieurs $(I,II)$ désignent les lieux des observations de chaque couple. Si les poses sont nominalement distinctes dans le temps, on ramène d'abord les observations individuelles au temps moyen en appliquant sur ces différences de temps les mouvements horaires en ascension droite et en déclinaison. Vu la petitesse prévisible des décalages temporels, on peut négliger le fait que la parallaxe change les mouvements horaires perçus par les observateurs. Comme il y a beaucoup plus d'observations que d'inconnues, une méthode de type "moindres carrés" s'impose pour rechercher les $\Delta T$ individuels ainsi que $\bar{p}$. Les corrections de parallaxes n'étant pas linéaires en fonction de $\bar{p}$, la version différentielle est à employer. Posons $\bar{p}=p+\Delta p$ où $p$ est une estimation préliminaire de $\bar{p}$, et $\Delta p$ l'écart à la bonne valeur. La linéarisation donne

$$\begin{matrix}\Delta\alpha(p+\Delta p)\cong\Delta\alpha|_p+(\frac{d}{dp}\Delta\alpha)|_p\Delta p\doteq\Delta_0\alpha+\Delta_1\alpha\,\Delta p\\ \Delta\delta(p+\Delta p)\cong\Delta\delta|_p+(\frac{d}{dp}\Delta\delta)|_p\Delta p\doteq\Delta_0\delta+\Delta_1\delta\,\Delta p\end{matrix}$$

. La forme matricielle des moindres carrés facilitera le travail... Mais avant, il faut encore remarquer qu'il manque une équation qui détermine les $\Delta T$ individuels: on prendra par exemple $\sum_{i\in\{I,II\}}\Delta T^i=0$. On voit bien pourquoi dans la matrice $A$, ci-dessous, car alors deux colonnes seraient proportionnelles et le système n'aurait pas de solution unique.

Allons-y dans le cas de deux observateurs:

$$\bar{y}=\begin{pmatrix}(\alpha_t-\Delta_0\alpha)_1^{II}-(\alpha_t-\Delta_0\alpha)_1^{I}\\ (\delta_t-\Delta_0\delta)_1^{II}-(\delta_t-\Delta_0\delta)_1^{I}\\ \vdots\\ \vdots\\ (\alpha_t-\Delta_0\alpha)_n^{II}-(\alpha_t-\Delta_0\alpha)_n^{I}\\ (\delta_t-\Delta_0\delta)_n^{II}-(\delta_t-\Delta_0\delta)_n^{I}\\ 0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}(\Delta_1\alpha^{II}-\Delta_1\alpha^{I})_1 & -(\dot{\alpha}_o)_1 & (\dot{\alpha}_o)_1\\ (\Delta_1\delta^{II}-\Delta_1\delta^{I})_1 & -(\dot{\delta}_o)_1 & (\dot{\delta}_o)_1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ (\Delta_1\alpha^{II}-\Delta_1\alpha^{I})_n & -(\dot{\alpha}_o)_n & (\dot{\alpha}_o)_n\\ (\Delta_1\delta^{II}-\Delta_1\delta^{I})_n & -(\dot{\delta}_o)_n & (\dot{\delta}_o)_n\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\ \bar{x}=\begin{pmatrix}\Delta p\\ \Delta T^{I}\\ \Delta T^{II}\end{pmatrix}.$$

La solution par les moindres carrés est $\bar{x}_{mc}=(A^tWA)^{-1}A^tW\bar{y}$ où $W^{-1}$ est la matrice des covariances sur $\bar{y}$. A priori, en choisissant de travailler en " pour les coordonnées et en s pour les temps, les incertitudes sont de l'ordre de 1, ce qui simplifie les calculs; des facteurs d'échelle qui tiennent compte des dispersions résiduelles seront introduits à la fin pour avoir des incertitudes plus réalistes. Pour se simplifier encore la vie, multiplions chaque élément de $\bar{y}$ et chaque ligne de $A$ concernant les ascensions droites par le $\cos\delta_o$ correspondant, pour avoir des écarts en secondes d'arc effectives (plutôt qu'équatoriales). La matrice $W$ est alors diagonale unitaire (avant introduction des facteurs d'échelles spatiale et temporelle). Dans $\bar{x}_{mc}$, $\Delta p$ est une correction (itérative) à apporter à $p$, tandis que les $\Delta T$ sont les erreurs systématiques individuelles de synchronisation.

On a toutes les équations en main. Il suffit de programmer cela en dur, dans un tableur ou un logiciel de calcul numérique. Rajouter d'autres observateurs est un jeu d'enfant avec cette notation.

## Les mesures

Via la liste Audelle, des observations simultanées de l'astéroïde 2000 $QW_7$ ont été planifiées entre Stefano Sposetti, Philippe Dupouy et moi-même d'une part, et Thierry Payet et René Roy d'autre part. Se sont encore joints Tom Alderweirel et Cédric Leyrat. La météo ne m'ayant pas été favorable, c'est moi qui suit «collé» à la réduction (avec tout de même beaucoup de plaisir <;3)~~~~).

Les observations publiées par le Minor Planet Center et recueillies dans le fichier http://newton.dm.unipi.it/neodys/mpcobs/2000QW7.rwo ont été sélectionnées, ainsi que celles qui me sont parvenues par courriel. Seuls les coopérations qui ont donné au moins deux observations simultanées (à mieux que cinq secondes) ont été retenues dans un premier temps (voir le complément pour les résultats incorporant tous les doublets). Il s'agit des sites 182+958 (18 observations), ainsi que 143+627 (27 observations). Les coordonnées géocentriques des observatoires figurent dans la table:

| *Code* | $\lambda$, ° | $r\cos\psi$, $r_{Terre}$ | $r\sin\psi$, $r_{Terre}$ | *Observatoire* |
|---|---|---|---|---|
| 46 | 14,2881 | 0,659160 | +0,749586 | *Klet* |
| 143 | 9,0250 | 0,693013 | +0,718616 | *Gnosca, Stefano Sposetti* |
| 145 | 4,5597 | 0,627384 | +0,776200 | *s-Gravenwezel, Tom Alderweireldt* |
| 180 | 3,9519 | 0,725763 | +0,685752 | *Mauguio, Cédric Leyrat* |
| 182 | 55,2586 | 0,933978 | −0,356350 | *St-Paul de la Réunion, Thierry Payet* |
| 557 | 14,7837 | 0,645293 | +0,761477 | *Ondrejov* |
| 627 | 5,2146 | 0,720049 | +0,691709 | *Blauvac, René Roy* |
| 642 | 236,6850 | 0,664858 | +0,744570 | *Oak Bay* |
| 670 | 240,9558 | 0,827814 | +0,559261 | *Camarillo* |
| 846 | 269,6550 | 0,779877 | +0,623959 | *Elsah* |
| 920 | 282,3353 | 0,731651 | +0,679509 | *Rochester* |
| 958 | 358,9717 | 0,724265 | +0,687323 | *Dax, Philippe Dupouy* |
| 967 | 358,9778 | 0,615111 | +0,785896 | *Greens Norton* |

Mon programme personnel de détermination des orbites a rapidement été modifié pour permettre de calculer $\begin{pmatrix} (\alpha_t-\Delta_0\alpha)^{II}-(\alpha_t-\Delta_0\alpha)^{I} & \Delta_1\alpha^{II}-\Delta_1\alpha^{I} & \dot{\alpha}_o \\ (\delta_t-\Delta_0\delta)^{II}-(\delta_t-\Delta_0\delta)^{I} & \Delta_1\delta^{II}-\Delta_1\delta^{I} & \dot{\delta}_o \end{pmatrix}$ pour chaque couple d'observation, à partir d'une estimation de $\bar{p}$. Les éléments orbitaux sont auparavant recalculés par ce même programme avec toutes les observations à disposition. Ensuite de quoi, un script permet d'assembler les matrices et vecteurs, et de lancer les calculs de réduction. Une fois calculées les constantes dans le vecteur $\vec{x}$ et sa matrice de covariance (=celle des incertitudes), le vecteur $\vec{e}=\vec{y}-A\vec{x}$, après y avoir retranché les termes de synchronisation, contient les erreurs sur les estimations des écarts en ascension droite et en déclinaison. L'estimation a posteriori des incertitudes correspond à multiplier les incertitudes initialement prévues par $\sqrt{\frac{\vec{e}\cdot\vec{e}}{n-4}}$ pour la partie spatiale ($n$ est le nombre total des équations en ascension droite et en déclinaison). La partie temporelle est laissée telle qu'elle, car elle a un intercouplage trop faible pour avoir une dispersion plus réaliste. Une nouvelle itération est alors effectuée.

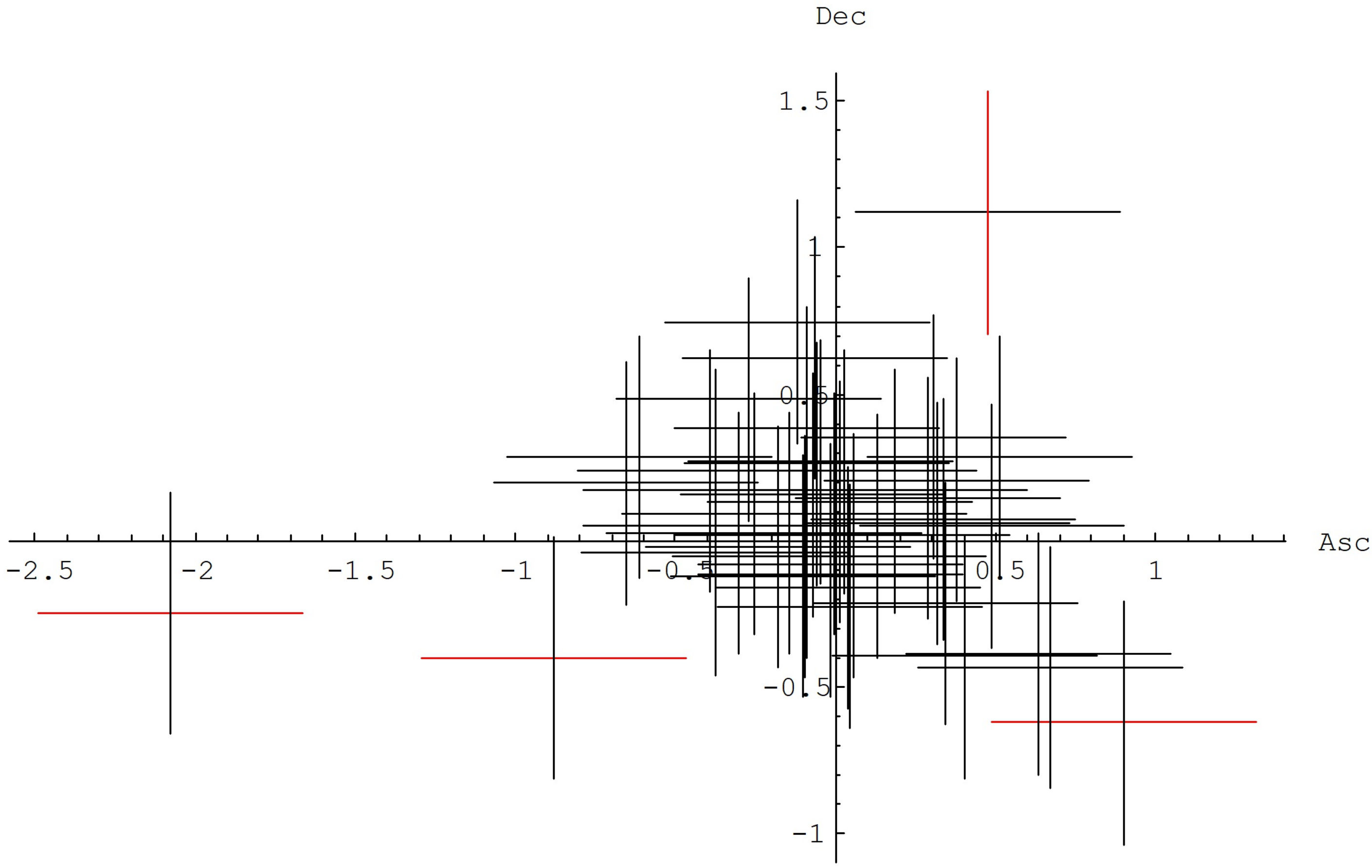
## Résultats

Une fois tous les calculs effectués, on trouve que

$$\begin{aligned}\bar{p} &= 8{,}796 \pm 0{,}003'' \\ \Delta T^{182} &= +2{,}54 \pm 0{,}56s \\ \Delta T^{958} &= -2{,}54 \pm 0{,}56s \\ \Delta T^{143} &= +0{,}32 \pm 0{,}52s \\ \Delta T^{627} &= -0{,}32 \pm 0{,}52s\end{aligned}$$

. La dispersion résiduelle est de $0{,}41''$. Les quatre équations de résidus supérieurs à deux fois la dispersion ont été enlevées lors de l'analyse. Les observations du tandem 182+958 sont d'un peu moins bonne qualité que celles de 143+627, mais comme la base est bien plus grande, cela apporte tout de même une contribution décisive à la mesure de $\bar{p}$.

Les résidus finaux en secondes d'arc effectives en ascension droite et en déclinaison ont l'allure suivante (le sens de l'axe Asc est contra-naturel):




## Conclusions

La méthode astucieuse proposée pour calculer le facteur d'échelle du système solaire a l'avantage de se baser sur les différences de positions mesurées par des observateurs distincts, et non sur la connaissance d'une orbite parfaite. En particulier, elle est donc indépendante du choix du catalogue astrométrique qui contient inévitablement des erreurs systématiques par rapport à l'orbite "parfaite", pour autant que les deux observateurs utilisent le même catalogue et les mêmes étoiles. Ce dernier point peut être relâché dans la pratique par le fait que les clichés contiennent beaucoup plus d'étoiles que de paramètres libres dans le processus de réduction.

L'erreur entre la parallaxe à une unité astronomique déterminée $8{,}796 \pm 0{,}003''$ et la parallaxe réelle $\bar{p} = 8{,}794''$ est de $0{,}02\%$. Cela revient à pouvoir estimer le diamètre de la terre exprimé en unités astronomiques avec cette même erreur. Et inversement. Pour comparaison, cela ferrait $2km$ sur le rayon terrestre.

Visiblement, les observateurs se sont donnés beaucoup de peine pour synchroniser les déclencheurs sur leur horloge locale; le décalage entre les jeux de pendules est estimé à une poignée de secondes de temps pour un tandem, et moins d'une seconde pour le second.

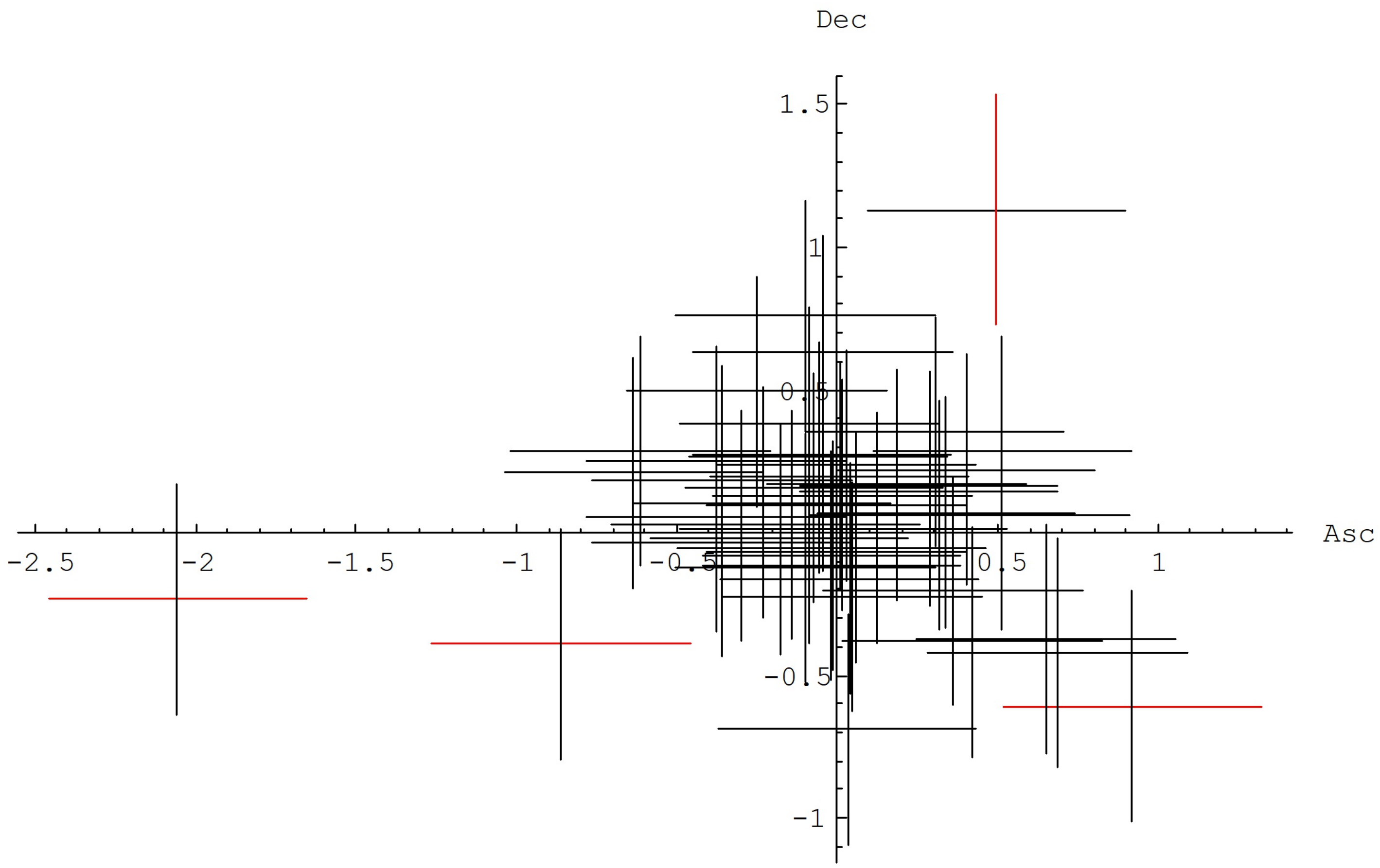
Bravo aux quatre équipes qui ont réussi à se synchroniser, et merci aussi aux autres observateurs qui ont bien voulu participer à cette belle aventure. Merci aussi à Alain Maury, fondateur de la liste Audelle sans laquelle ce genre de coopération serait difficile...

## Complément

Avec toutes les observations par paires mêmes isolées (tandems 46+557, 143+627, 182+958, 642+670, 846+920, 958+967), on trouve

$$\begin{gathered}\bar{p}=8{,}796\pm0{,}003''\\ \Delta T^{46}=-0{,}66\pm1{,}18s\\ \Delta T^{143}=-0{,}32\pm0{,}52s\\ \Delta T^{182}=+2{,}85\pm0{,}53s\\ \Delta T^{557}=+0{,}67\pm1{,}18s\\ \Delta T^{627}=+0{,}32\pm0{,}52s\\ \Delta T^{642}=+1{,}00\pm1{,}13s\\ \Delta T^{670}=-1{,}00\pm1{,}13s\\ \Delta T^{846}=-0{,}72\pm1{,}30s\\ \Delta T^{920}=+0{,}72\pm1{,}30s\\ \Delta T^{958}=-2{,}33\pm0{,}47s\\ \Delta T^{967}=+1{,}81\pm0{,}85s\end{gathered}$$

. Quatre mesures ont été éliminées de la réduction, car très probablement erronées. Les résidus en secondes d'arc effectives, selon l'ascension droite et la déclinaison sont graphiquement comme suit:




## Formules de correction de parallaxe

Les formules rigoureuses ne sont pas très difficiles à obtenir depuis les coordonnées cartésiennes.

Coordonnées de l’objet par rapport au centre de la terre: $\begin{array}{c} x_a = R\cos\alpha_o\cos\delta_o \\ y_a = R\sin\alpha_o\cos\delta_o \\ z_a = R\sin\delta_o \end{array}$. Pour l’observateur, c’est similaire: $\begin{array}{c} x_b = \cos T r\cos\psi \\ y_b = \sin T r\cos\psi \\ z_b = r\sin\psi \end{array}$, avec $T$ le temps sidéral local. On a donc à résoudre $\begin{array}{c} x_a - x_b = R_t\cos\alpha_t\cos\delta_t \\ y_a - y_b = R_t\sin\alpha_t\cos\delta_t \\ z_a - z_b = R_t\sin\delta_t \end{array}$.

Profitons de faire une rotation autour de l’axe $z$: $\begin{array}{c} R\cos\alpha_o\cos\delta_o - \cos T r\cos\psi = R_t\cos\alpha_t\cos\delta_t \\ R\sin\alpha_o\cos\delta_o - \sin T r\cos\psi = R_t\sin\alpha_t\cos\delta_t \\ R\sin\delta_o - r\sin\psi = R_t\sin\delta_t \end{array}$ devient

$\begin{array}{c} R\cos\delta_o - \cos H r\cos\psi = R_t\cos(\alpha_t - \alpha_o)\cos\delta_t \\ -\sin H r\cos\psi = R_t\sin(\alpha_t - \alpha_o)\cos\delta_t \\ R\sin\delta_o - r\sin\psi = R_t\sin\delta_t \end{array}$. En mettant la définition $\frac{1\, r_{Terre}}{1\, UA} := \sin\bar{p}$, le tour est joué.

$r_{Terre}$ est le rayon équatorial “moyen” de la terre, et $UA$ représente l’unité astronomique.