

Cours 3 – 2 octobre 2023

Quizz du jour

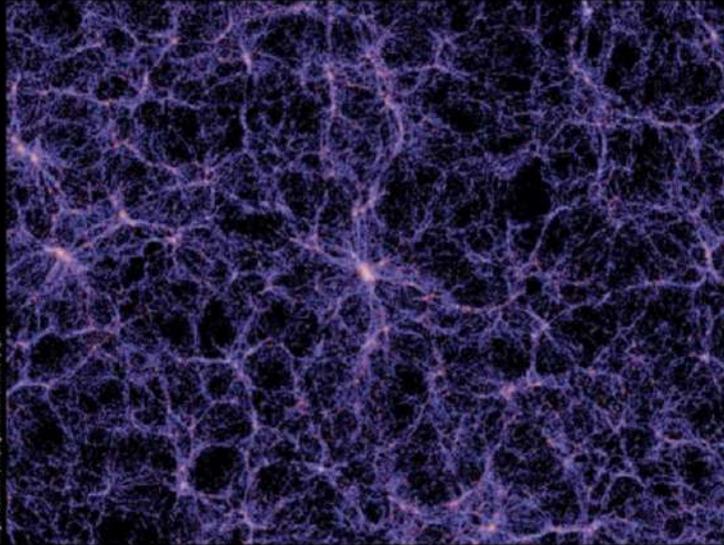
Titre	10A001 Charbonnel 20230926	
Nb de participants		22
Date d'évaluation	2023-09-26 17:41:03	
Question	Notre galaxie s'appelle	
Type	Réponse unique	
Réponse	La galaxie d'Andromède	2
Réponse	La galaxie de Hubble	0
Réponse	La Voie Lactée	20
Question	1 parsec correspond à une distance d'approximativement	
Type	Réponse unique	
Réponse	3.2 années lumière	17
Réponse	0.32 années lumière	1
Réponse	320 années lumière	4
Question	La mission spatiale Gaia mesure	
Type	Réponse multiple	
Réponse	Le fonds diffus cosmologique	6
Réponse	La distance des étoiles dans notre Galaxie	14
Réponse	La distance des galaxies les plus lointaines	7
Question	Henrietta Lewitt a mesuré	
Type	Réponse unique	
Réponse	La parallaxe des étoiles les plus brillantes du Petit Nuage de Magellan	5
Réponse	La relation période-luminosité des étoiles Céphéides du Petit Nuage de Magellan	15
Réponse	La luminosité des supernovae de type II du Petit Nuage de Magellan	2
Question	Une supernova de type II est l'explosion d'une étoile massive	
Type	Vrai/Faux	
Réponse	VRAI	19
Réponse	FAUX	3
Réponse	Null	0
Question	Plus une étoile Céphéide est brillante, plus sa période de pulsation est longue	
Type	Vrai/Faux	

Réponse	VRAI	7
Réponse	FAUX	15
Réponse	Null	0
Question	Le Grand Nuage de Magellan est	
Type	Réponse unique	
Réponse	une galaxie située à environ 50 kpc de la Voie Lactée	13
Réponse	une nébuleuse planétaire située dans la Voie Lactée	9
Question	Une supernova de type Ia est l'explosion d'une étoile massive	
Type	Vrai/Faux	
Réponse	VRAI	14
Réponse	FAUX	8
Réponse	Null	0
Question	Le télescope Euclid est	
Type	Réponse unique	
Réponse	un télescope européen de 8m de diamètre installé au Chili	5
Réponse	un télescope spatial de l'Agence Spatiale Européenne	17
Réponse	un télescope spatial de la NASA	0
Question	L'univers est isotrope et homogène	
Type	Vrai/Faux	
Réponse	VRAI	17
Réponse	FAUX	5
Réponse	Null	0



Cosmologie

Corinne Charbonnel & Stéphane Paltani
Professeur.e.s au Département d'Astronomie UniGE

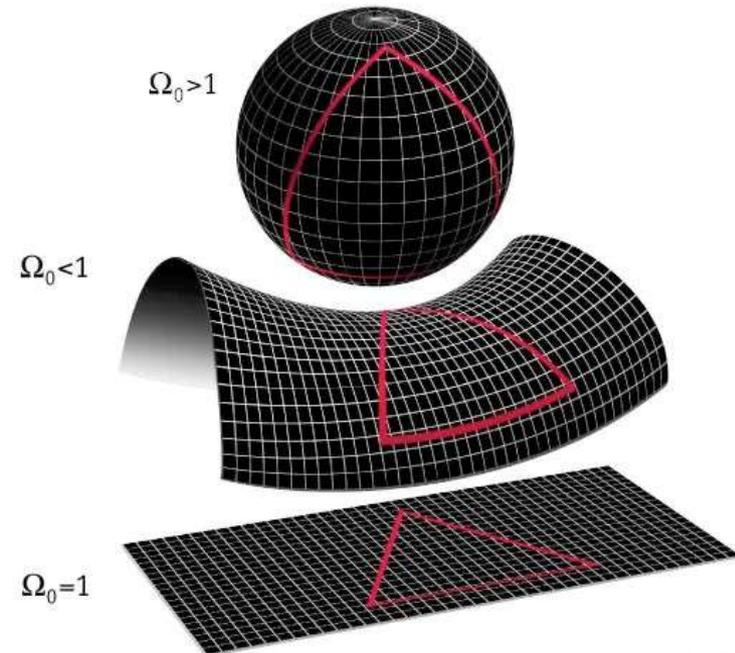


le mardi, du 19 septembre au 19 décembre 2023
de 17h45 à 18h45
Auditoire A300 - Sciences II, 30 quai Ernest-Ansermet, Genève

Inscription au cours sur place le 19 septembre
Renseignements : <http://unige.ch/sciences/astro>

Cours 3 – 2 octobre 2023

Les équations de Friedmann



Contenu

- Un peu de relativité
- L'équation d'Einstein
- Les équations de Friedmann
- Évolution de l'Univers
- L'équation d'état

Le principe de relativité (restreinte)



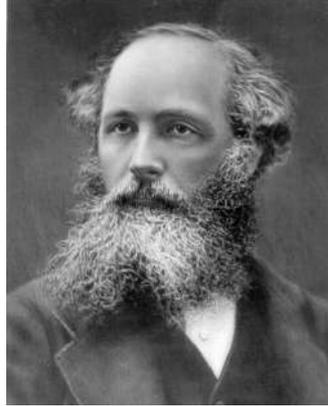
La relativité (restreinte) de Galilée



Les deux observateurs dériveront les mêmes lois de la physique

On ne peut donc pas distinguer ces observateurs

Les équations de Maxwell



James Clerk Maxwell
1831-1879



$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

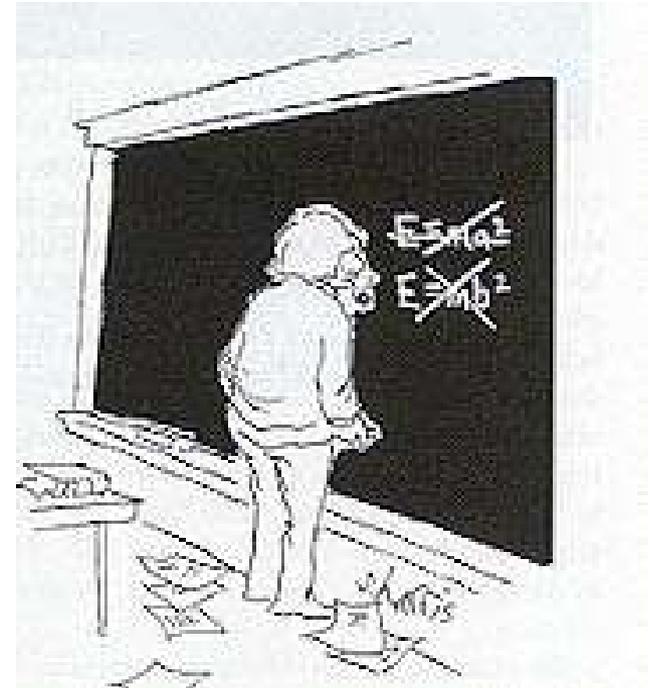
$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La relativité restreinte d'Einstein



Albert Einstein
1905

Postulat : La vitesse de la lumière ne dépend pas de l'observateur



Les transformations de Lorentz

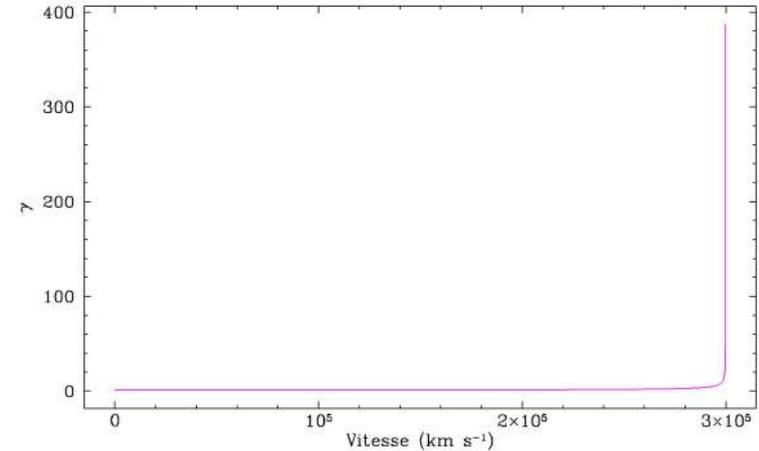
$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

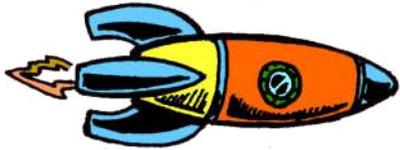
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



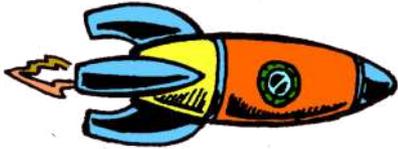
Addition des vitesses

$$u = \frac{v + u'}{1 + (vu'/c^2)}$$

$$C = 300\,000 \text{ km s}^{-1} = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$$



$$v = 299\,792\,450 \text{ m s}^{-1}$$

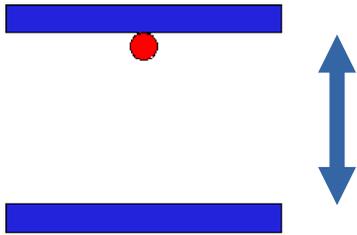


$$u' = 20\,000\,000 \text{ m s}^{-1}$$

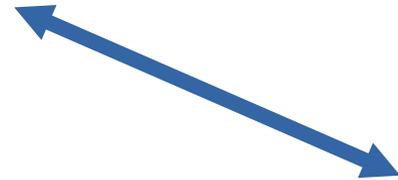
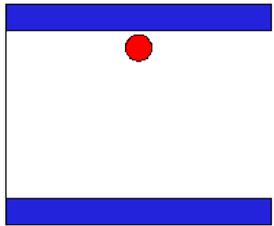
$$u = 299\,792\,451 \text{ m s}^{-1}$$



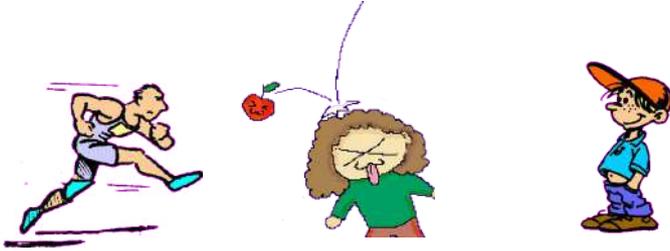
Dilatation du temps



$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



Relativité générale

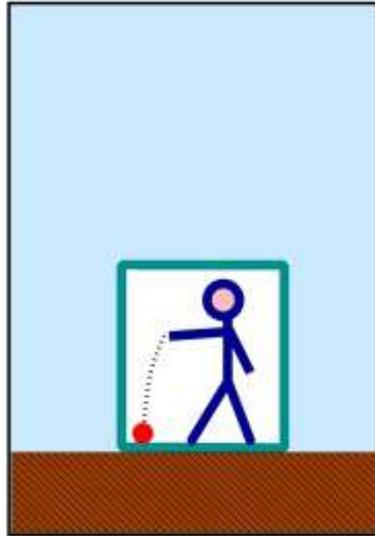
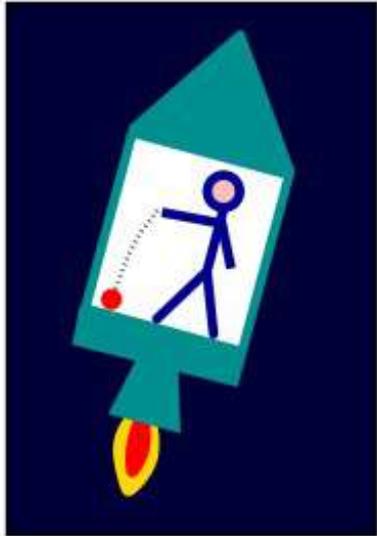


Relativité restreinte:

Un observateur ne peut pas faire une expérience qui lui indique s'il est en mouvement ou au repos

Relativité générale:

Un observateur ne peut pas faire une expérience qui lui indique s'il est en **accélération** ou **s'il est soumis à la gravité**

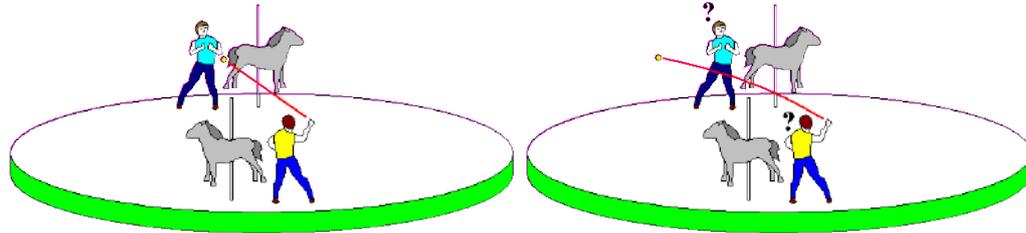


Relativité générale



Relativité restreinte:

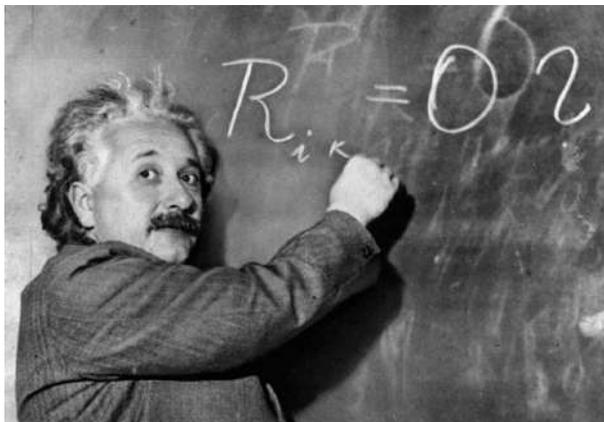
Un observateur ne peut pas faire une expérience qui lui indique s'il est en mouvement ou au repos



Relativité générale:

Un observateur ne peut pas faire une expérience qui lui indique s'il est en **accélération** ou **s'il est soumis à la gravité**

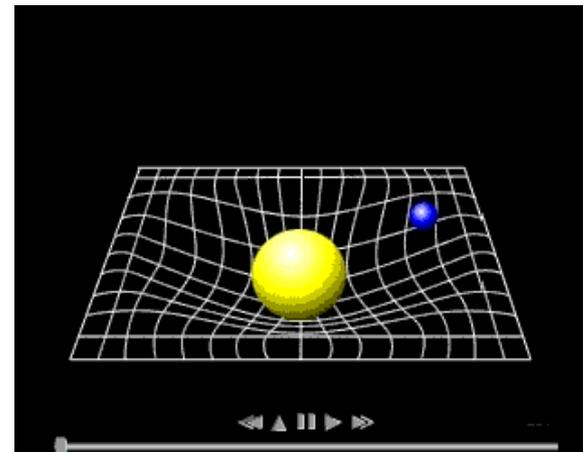
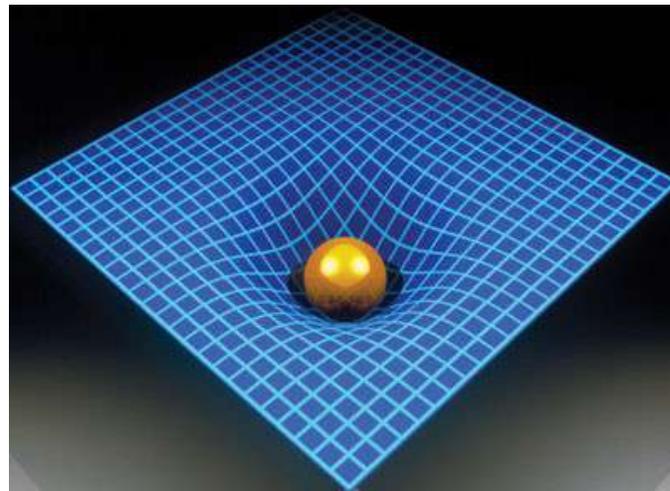
Relativité générale d'Einstein



Albert Einstein
1915

L'espace-temps est déformé par la présence de matière-énergie

Un corps soumis seulement à la « gravité » se déplace en « ligne droite »



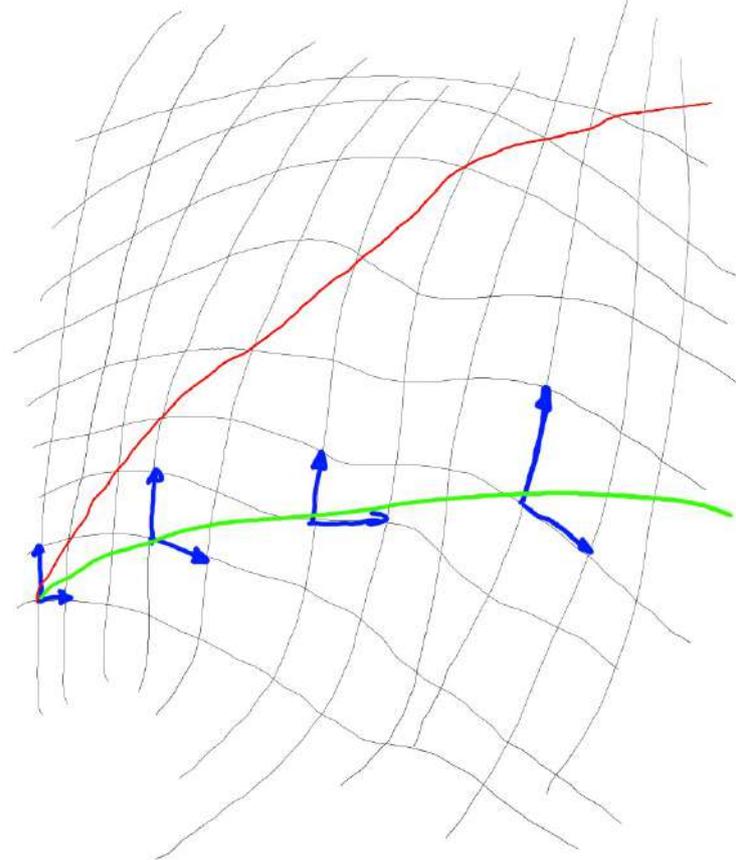
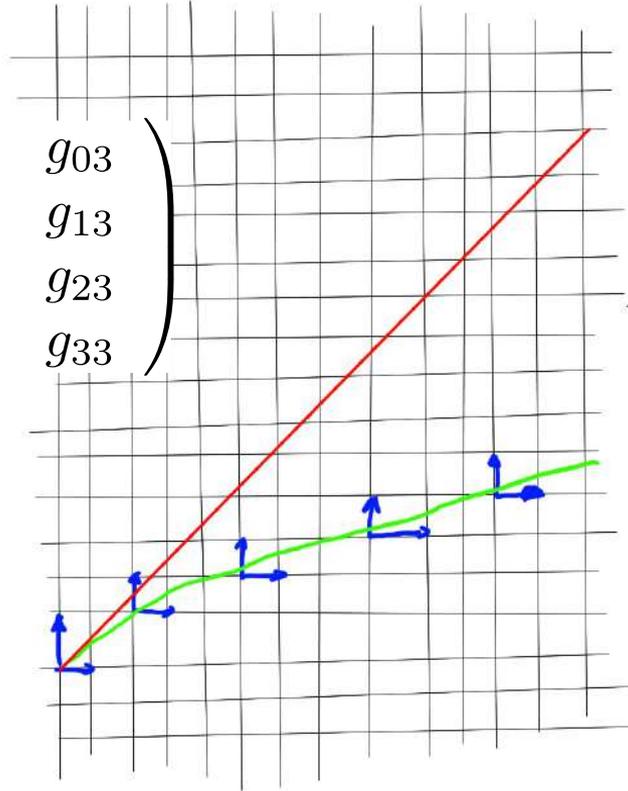
La métrique

Tenseur métrique:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

$$dx = c dt$$



La métrique reflète la forme et la longueur de l'Univers .

L'équation d'Einstein

L'Univers se courbe sous l'effet de l'énergie qui s'y trouve

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$G_{\mu\nu}$: Tenseur d'Einstein

$R_{\mu\nu}$: Tenseur de Ricci – décrit la courbure de l'Univers $R_{\mu\nu}(g_{\mu\nu})$

R : Courbure de Ricci – la valeur de la courbure $R(g_{\mu\nu})$

Λ : Constance cosmologique

G : Constante gravitationnelle

$T_{\mu\nu}$: Tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion contient toutes les formes d'énergie:

- Masse – $-\rho c^2$
- Pression – p
- Charge, champs électriques
- Etc.

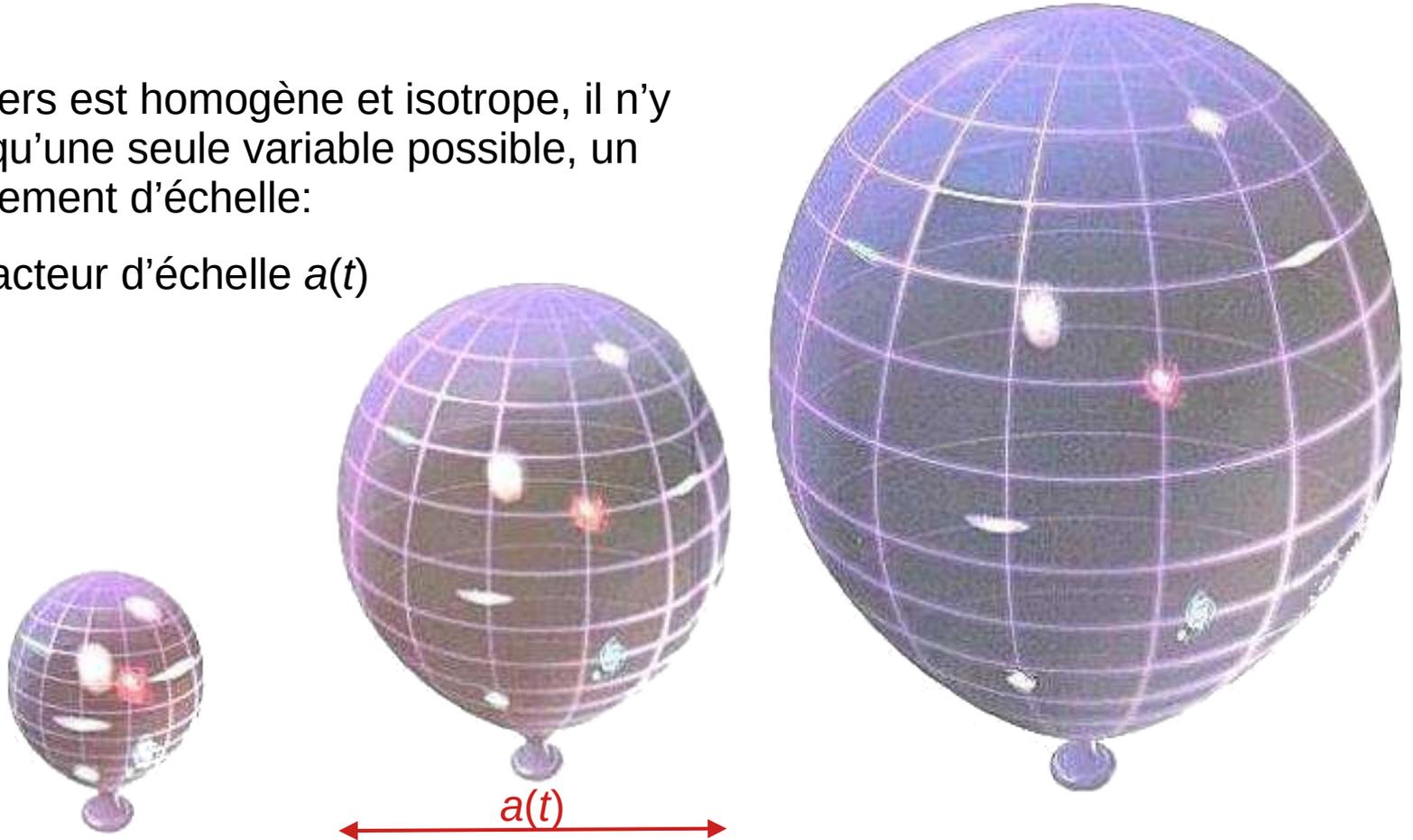
En cosmologie, on ne considère généralement que la masse et la pression :

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Facteur d'échelle de l'Univers

L'Univers est homogène et isotrope, il n'y a donc qu'une seule variable possible, un changement d'échelle:

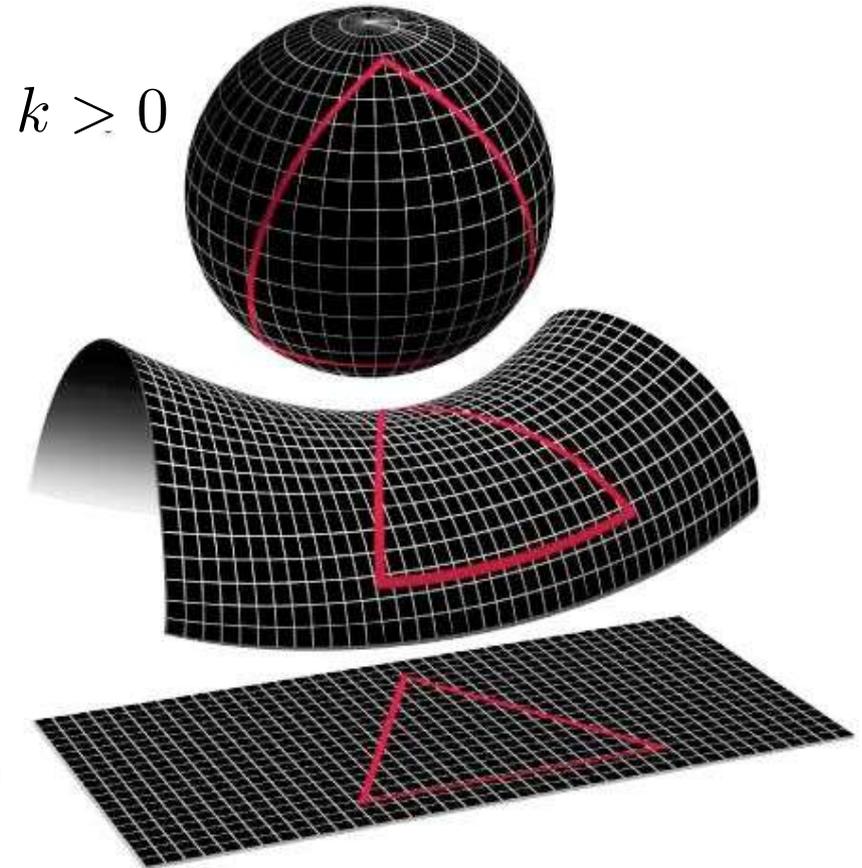
- Facteur d'échelle $a(t)$



Courbure de l'Univers

L'équation d'Einstein est locale, et n'indique pas la topologie

Il y a trois géométries possibles pour un Univers homogène et isotrope



Les équations de Friedmann

Avec $a(t_0)=a_0$, les équations d'Einstein donnent les équations de Friedmann:

Pour la composante 00 :

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

Pour les composantes ii :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

a est le facteur d'échelle

\dot{a} est la vitesse d'expansion

\ddot{a} est l'accélération de l'expansion

$$\frac{\dot{a}(t_0)}{a_0} \equiv H_0$$

Indice 0 \equiv maintenant

L'Univers statique d'Einstein I

Einstein voulait un Univers de matière ($p=0$) statique :

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \Rightarrow \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}\rho = -\frac{1}{2}\frac{kc^2}{a^2} \Rightarrow \frac{kc^2}{a^2} = 0$$

La seconde équation implique $k = 0$

Donc la première équation implique $\rho_0 = 0$

Il n'y a pas de solution non vide!

L'Univers d'Einstein-de Sitter

L'Univers d'Einstein-de Sitter est la solution d'un Univers plat ($k=0$)

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \Rightarrow \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{a^3}{a}$$

On trouve une solution:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}$$

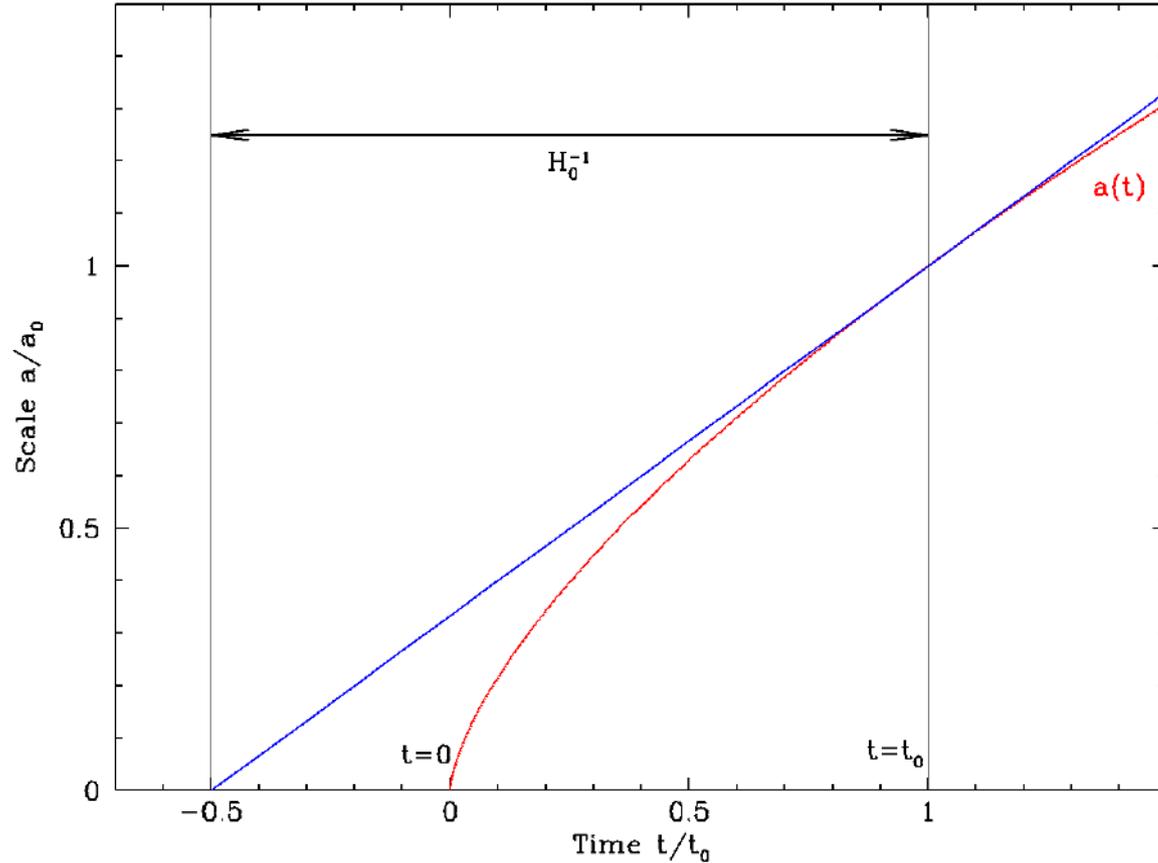
La constante de Hubble est:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \quad \text{ou} \quad \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

Densité critique: $\rho_c = 10^{-27} \text{ kg/m}^3$, soit 1 atome d'hydrogène par m^3

Âge de l'Univers: $t_0 = \frac{2}{3H_0}$

L'Univers d'Einstein-de Sitter



Univers fermé ($k>0$)

Si $k>0$, on n'a une solution que pour:

$$\rho_0 > \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

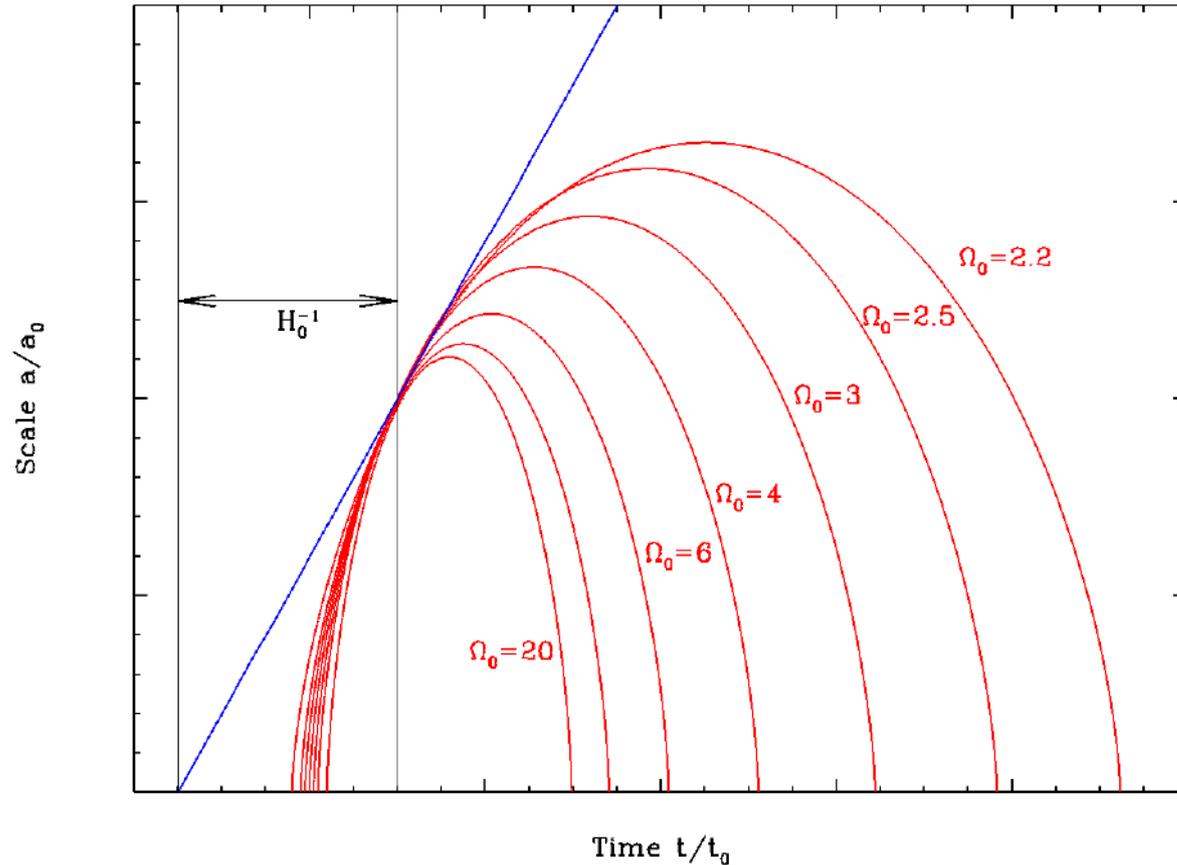
ρ_c est donc bien une densité critique

La densité relative:

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_C}$$

On peut résoudre l'équation de Friedmann, et on obtient un univers en expansion qui finit par se recontracter jusqu'à former un big crunch

Univers fermé ($k>0$)



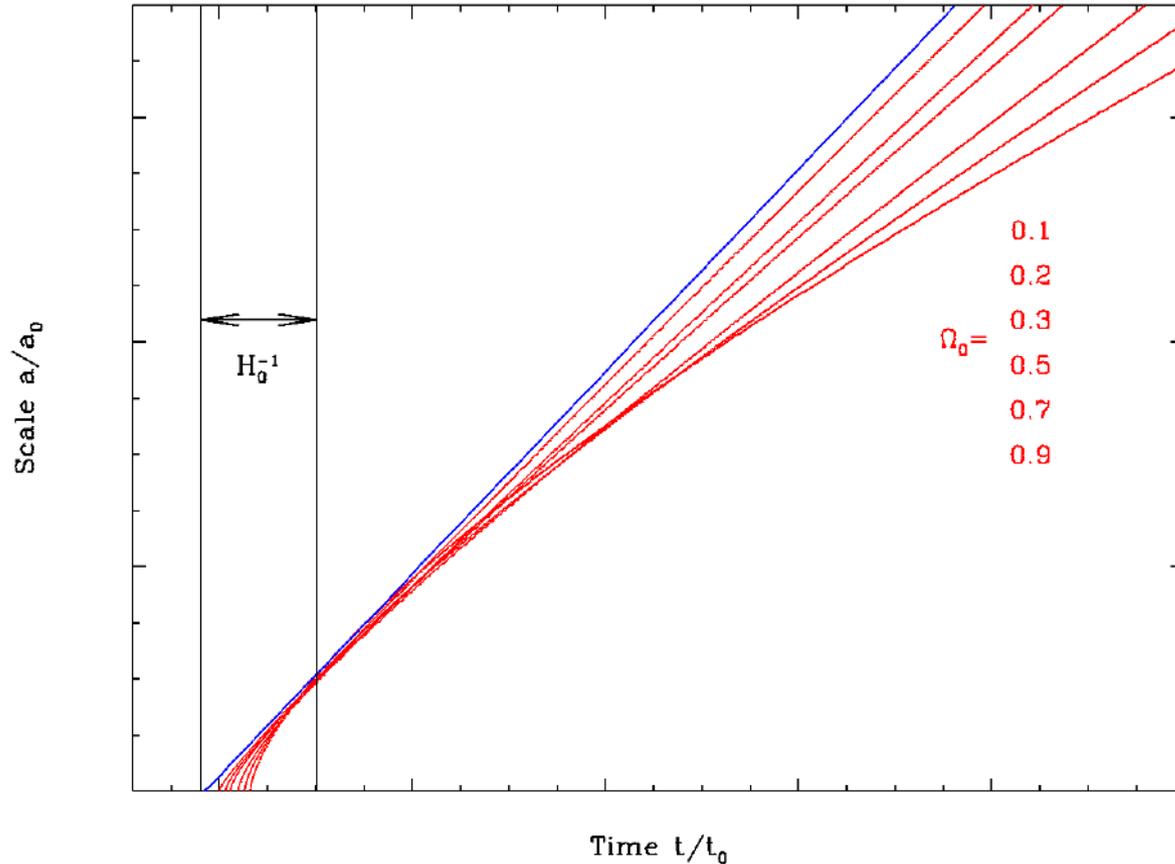
Univers ouvert ($k < 0$)

Si $k < 0$, on n'a une solution que pour:

$$\rho_0 < \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

L'univers en expansion infinie

L'Univers ouvert ($k < 0$)



Les équations de Friedmann avec constante cosmologique

Avec $a(t_0)=a_0$, les équations d'Einstein avec *constante cosmologique* donnent les équations de Friedmann généralisées:

Pour la composante 00 :

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

Pour les composantes ii :

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 = \frac{-4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

L'Univers statique d'Einstein II

Une possibilité de sauver un Univers statique avec $k > 0$ est de réintroduire la constante cosmologique Λ

$$\frac{kc^2}{a_0^2} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0$$

$$-\frac{1}{3}\Lambda c^2 = \frac{-4\pi G}{3}\rho_0$$

Il y a une solution:

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2}\rho_0$$

Mais l'équilibre est instable et l'Univers n'est pas statique!

Einstein's biggest blunder!

L'Univers de de Sitter

Quelle est l'évolution d'un Univers vide ?

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 = 0 \Rightarrow \ddot{a} = \frac{1}{3}\Lambda c^2 a$$

Il y a une solution :

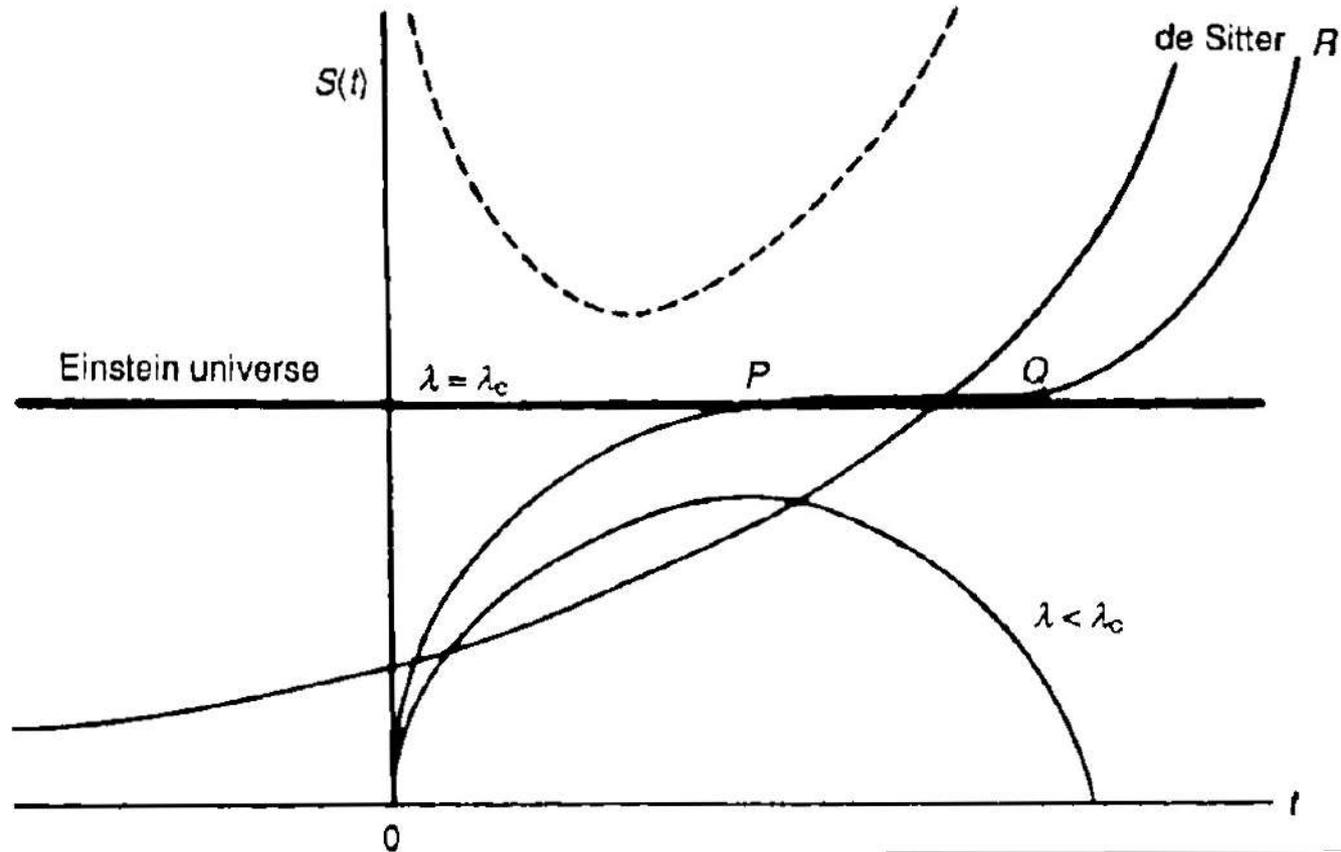
$$a(t) \propto \exp(Ht)$$

avec la constante de Hubble :

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}$$

Si $\Lambda > 0$, l'Univers vide s'étend de façon exponentielle, et H est constante

Univers avec constante cosmologique



L'équation d'état de l'Univers

Équation d'état d'un gaz parfait :

$$PV = NkT$$

Relation linéaire généralisée:

$$p = \omega \rho c^2$$

L'équation d'état relie entre elles les propriétés d'un constituant

Rappel:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

L'équation d'état de la matière

On néglige les vitesses et les collisions:

$$p = 0 \Rightarrow \omega = 0$$

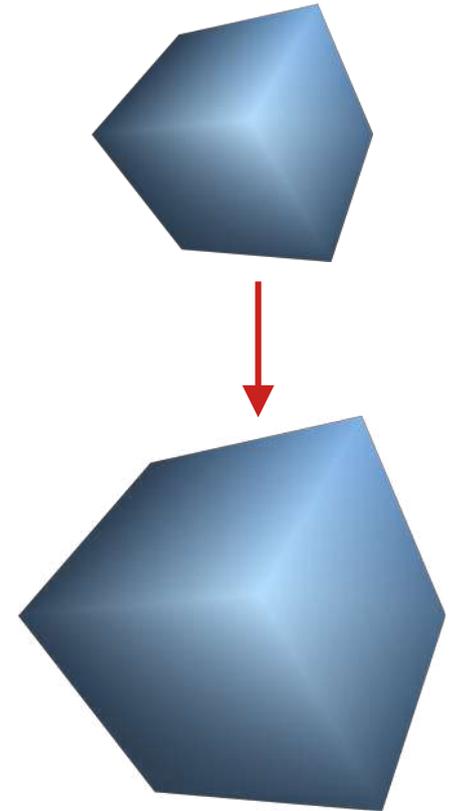
L'équation de continuité impose que l'énergie se conserve

Dans ce cas :

$$\rho_m c^2 V = \text{constante} \propto \rho_m a^3$$

Donc :

$$\rho_m \propto a^{-3}$$



L'équation d'état de la lumière

La seule énergie d'un photon est l'énergie cinétique :

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2 \Rightarrow \omega = \frac{1}{3}$$

L'équation de continuité impose que l'énergie se conserve

Dans ce cas, on trouve :

$$\rho_r \propto a^{-4}$$

La lumière se dilue plus vite que la matière :

L'expansion dilue les photons, mais en plus ceux-ci perdent de l'énergie cinétique!

« L'équation d'état » de la constante cosmologique I

Rappel: Les équations de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda c^2$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{1}{3}\Lambda c^2$$

On peut intégrer Λ dans la densité et la pression :

$$\rho \mapsto \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

$$p \mapsto p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

« L'équation d'état » de la constante cosmologique II

Λ implique donc une densité :

$$\rho = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

Et une pression négative :

$$p = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

Donc : $p = -\rho c^2 \Rightarrow \omega = -1$

On en déduit que la densité due à la constante cosmologique ne change pas :

$$\rho_\Lambda \propto a^0$$

L'équation de Friedmann en terme de densité

On peut exprimer toutes ces formes d'énergie en termes de densité par rapport à la densité critique + un terme de courbure:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c} \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} \quad \Omega_k = \frac{\rho_k}{\rho_c}$$

L'équation de Friedmann devient, avec : $\hat{a} = \frac{a}{a_0}$

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left(\Omega_\Lambda + \frac{\Omega_m}{\hat{a}^3} + \frac{\Omega_r}{\hat{a}^4} + \frac{\Omega_k}{\hat{a}^2} \right)$$

Si on peut mesurer tous les Ω et H_0 , on **résout la cosmologie!**