

Bases physiques de l'astrophysique

27 septembre 2006

Table des matières

1	Ordres de grandeurs en Astrophysique	5
1.1	Echelle des énergies des phénomènes physiques	5
1.1.1	Energie de masse au repos	5
1.1.2	Les énergies de liaison atomique	5
1	Généralités sur le rayonnement	5
1.1	Le rayonnement dans l'univers	5
1.2	L'intensité spécifique	6
1.2.1	L'intensité spécifique moyenne	7
1.3	Le flux	8
1.3.1	Les flux entrant et sortant	9
1.4	La luminosité d'un astre	10
1.5	Eclairement	10
1.6	Densité d'énergie du rayonnement	13
1.7	Généralités sur la pression	14
1.7.1	Cas non relativiste (NR)	17
1.7.2	Cas relativiste (R)	17
1.8	La pression de rayonnement	19
1.8.1	Les moments de l'intensité spécifique	20
1.9	La pression de rayonnement dans les étoiles <i>en lecture</i>	20
1.9.1	What are the Stars?	20
1.9.2	Why are the stars as they are?	22
1.10	Le rayonnement du corps noir	28
1.11	La température effective	29
1.11.1	La température d'équilibre de la Terre	30
1.12	L'entropie du rayonnement	33

2	Transfert d'énergie rayonnante	36
2.1	Coefficient d'extinction	37
2.1.1	L'extinction atmosphérique	38
2.2	Coefficient d'émission	39
2.3	La loi de Kirchhoff	41
2.4	L'équation de transfert	43
2.5	L'équation de transfert dans les intérieurs stellaires	45
2.6	L'opacité moyenne	47
2.7	La relation masse–luminosité	49
2.8	Atmosphère grise en équilibre radiatif	50
2.9	Intensité sortante	52
2.10	L'assombrissement centre–bord	57
2.11	Le modèle d'atmosphère solaire empirique (en lecture)	58
2.12	L'opacité due à l'ion H^-	59
2.13	Note sur la fonction source	60
2.14	Transfert d'énergie convective	61
2.14.1	Note sur les transformations adiabatiques	63
2.14.2	La convection adiabatique	65
2.15	Transfert par conduction électronique	66
3	Absorption et émission du rayonnement	71
3.1	Les ondes électromagnétiques	71
3.2	Absorption par un oscillateur harmonique	72
3.3	Absorption par les raies spectrales	79
3.4	Diffusion par les électrons libres	83
3.5	Photoionisation ou absorption bound-free	86
3.6	Transitions hyperboliques : <i>absorption free–free</i> et <i>Bremsstrahlung</i>	87
3.7	L'opacité globale dans le milieu stellaire	89
3.8	Note sur la largeur équivalente, la courbe de croissance et la détermination des abondances	94
3.9	Note sur les abondances des éléments	103
3.10	Rappels d'électrodynamique (en lecture)	108
3.10.1	Moments d'une distribution de charges	108
3.10.2	Potentiel et champ d'un dipôle	110
3.10.3	Champ électrique créé par la matière polarisée	110
3.10.4	Condensateur rempli d'un diélectrique	112

3.10.5	Champ d'une charge dans un milieu diélectrique et théorème de Gauss	113
3.10.6	Vitesse de phase et de groupe	115
4	Propriétés Thermodynamiques	116
4.1	Rappels de physique statistique	116
4.2	Gaz et atomes excités	121
4.3	Ionisation des gaz	123
4.4	Poids moléculaire et pression des milieux neutres, partiellement ou complètement ionisés.	133
4.5	Propriétés physiques du milieu partiellement ionisé	136
4.6	Influence de l'état physique du milieu stellaire sur les chaleurs spécifiques. Les exposants adiabatiques.	140
4.7	Chaleurs spécifiques et exposants adiabatiques pour un mélange de gaz parfait et de rayonnement	149
5	Les gaz dégénérés	153
5.1	Généralités	153
5.2	Gaz partiellement dégénéré	155
5.3	Gaz complètement dégénérés	158
5.4	Conséquences remarquables de la loi des gaz dégénérés	162
5.5	Effets électrostatiques	165
5.6	Les états de la matière dans le plan $\log T$ vs. $\log \rho$	177
6	Les réactions nucléaires	183
6.1	Définitions générales	183
6.2	Réactions non-résonnantes	190
6.3	L'effet d'écran	196
6.4	Les réactions résonnantes (en lecture)	199
7	Compléments d'hydrodynamique	208
7.1	La fonction de distribution	208
7.1.1	Densité en nombre	209
7.1.2	Valeur moyenne d'une grandeur	209
7.2	Vecteur flux	210
7.2.1	Vecteur flux de la masse	211
7.3	Equations de base	211

7.4	Equation du mouvement avec termes de viscosité. Equation de <i>Navier-Stokes</i>	213
7.5	Expression de la viscosité	219
7.6	Equation de conservation de l'énergie	220
7.7	Nombres sans dimension	222
7.8	Equation du mouvement avec rotation	226

Préface

Ce cours a pour but de présenter des concepts de base utiles en astrophysique. Il sera l'occasion de revoir de manière concise quelques chapitres de physique générale, en optant comme point de vue, leur utilisation dans le cadre de problèmes touchant l'astrophysique.

Nous commencerons par une étude très générale du rayonnement permettant de définir les notions de base, puis nous aborderons l'étude des interactions du rayonnement avec la matière. Ce chapitre nous conduira tout naturellement à l'étude des différents états de la matière. Enfin nous terminerons par la discussion des réactions nucléaires en astrophysique et par une brève introduction à l'hydrodynamique.

Le plan général du cours est le suivant :

- 1) Généralités sur le rayonnement.
- 2) L'équation de transfert.
- 3) Absorption et émission du rayonnement.
- 4) Les propriétés thermodynamiques.
- 5) Les gaz dégénérés.
- 6) Les réactions nucléaires.
- 7) Introduction à l'hydrodynamique (si possible)

Plusieurs des notions introduites seront utiles pour suivre les cours intitulés "Diagnostiques spectroscopiques en astrophysique" et "Structure interne et évolution des étoiles".

Chapitre 1

Généralités sur le rayonnement

1.1 Le rayonnement dans l'univers

Dans l'univers actuel au temps t_0 , on peut distinguer l'énergie associée à la matière, l'énergie associée au rayonnement et vraisemblablement selon les dernières observations cosmologiques, l'énergie associée au vide¹. La densité de matière baryonique dans l'Univers est estimée à

$$\rho_b \sim 5 \cdot 10^{-28} \text{ kg m}^{-3} \quad (1.1)$$

soit 0.3 protons par m^{-3} . Si l'on utilise la relation $E = mc^2$, la densité associée au rayonnement (essentiellement le rayonnement de fond cosmologique, voir plus loin) vaut environ 1/1000 de la densité de matière baryonique. Donc actuellement la dynamique de l'univers est dominée par la matière et vraisemblablement le vide². Ceci n'a pas toujours été le cas (cf cours de Cosmologie).

Si le rayonnement ne contient qu'une toute petite partie de l'énergie dans l'univers actuel, il joue un rôle très important au moins à deux titres :

- 1) Le rayonnement électromagnétique joue un rôle important dans les mécanismes de transfert de l'énergie, notamment dans les intérieurs stellaires.
- 2) Le rayonnement électromagnétique est l'une des sources d'information les plus importantes pour l'astrophysique. Les autres sources d'in-

¹Voir par exemple l'article de Sanders "Observational Cosmology" astro-ph/0402065

²La densité associée à l'énergie du vide correspondrait à environ 70% de la densité critique de l'Univers (de l'ordre de $10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$), la densité de matière non baryonique à environ 25%, la densité de matière baryonique à 5%!

formation sont l'analyse des roches terrestres, des météorites, des roches lunaires, l'exploration des planètes par les sondes spatiales, l'étude du rayonnement cosmique. Dans le futur, des télescopes à neutrinos ainsi que des instruments capables de détecter les ondes gravitationnelles ouvriront de nouvelles fenêtres sur l'univers.

Dans ce chapitre, nous considérons le rayonnement comme un fluide continu. Les interactions entre matière et rayonnement seront décrites en faisant appel soit à la description ondulatoire ou corpusculaire du rayonnement.

1.2 L'intensité spécifique

Soit un élément infinitésimal de surface $d\sigma$ de normale \mathbf{n} . Soit un rayonnement se propageant dans la direction \mathbf{s} faisant un angle θ avec la normale \mathbf{n} (cf fig 1.1). La quantité d'énergie dU_ν dans l'intervalle de fréquences $[\nu, \nu+d\nu]$ qui traverse la surface $d\sigma$ dans un angle solide $d\Omega$ autour de la direction \mathbf{s} , pendant le temps dt est

$$dU_\nu = I_\nu d\nu d\sigma \cos\theta d\Omega dt. \quad (1.2)$$

Pour que l'on puisse considérer le rayonnement comme un fluide continu, notons que $d\sigma^{1/2} \gg \lambda$ où λ est la longueur d'onde, de même $dt \gg 1/\nu$ où ν est la fréquence, de manière à ce que les fluctuations provenant de la nature vibratoire du rayonnement soient moyennées. La quantité I_ν est appelée **l'intensité spécifique**. La quantité $[I_\nu d\nu]$ a pour unité des Watts/(m² stéradian). On peut de manière analogue définir I_λ . L'intensité peut être intégrée sur les fréquences $I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$. En toute généralité, I_ν est une fonction de la position, de la direction de propagation et du temps.

L'intensité spécifique se conserve dans l'espace vide. Ceci est vrai pour autant que des phénomènes, comme la production de paires ou la diffusion photon-photon soient négligés. Considérons la quantité d'énergie qui traverse, pendant le temps dt , la surface $d\sigma$ dans la direction \mathbf{s} et dans l'angle sous-tendu par la surface $d\sigma'$ qui se trouve à une distance r de $d\sigma$ (cf Fig. 1.2),

$$dU_\nu = I_\nu d\nu d\sigma \cos\theta d\Omega dt = I_\nu d\nu d\sigma \cos\theta \frac{d\sigma' \cos\theta'}{r^2} dt. \quad (1.3)$$

Cette énergie est égale à l'énergie reçue par $d\sigma'$ de la part de $d\sigma$

$$dU'_\nu = I'_\nu d\nu \frac{d\sigma \cos\theta}{r^2} d\sigma' \cos\theta' dt. \quad (1.4)$$

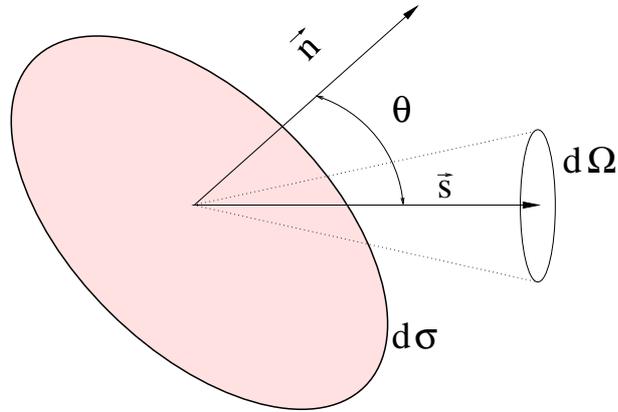


FIG. 1.1 – La formule 1.2 donne la quantité d'énergie traversant la surface $d\sigma$, par unité de temps et de fréquence, dans l'angle solide $d\Omega$, dans la direction s faisant un angle θ avec la normale n .

Dans l'espace vide $dU_\nu = dU'_\nu$, donc $I_\nu = I'_\nu$. Dans le vide, l'intensité spécifique dans la direction PP' est la même en tout point de la droite PP' .

1.2.1 L'intensité spécifique moyenne

Dans le cas du Soleil, il est possible de mesurer la variation de l'intensité spécifique avec l'angle θ (cf Fig. 1.3). Il suffit de mesurer la variation d'intensité entre le bord et le centre du Soleil. Implicitement on fait ici l'hypothèse de symétrie sphérique. Dans le cas des étoiles, de telles mesures ne sont pas possible. Par contre, il est possible de mesurer l'énergie émise par unité de temps dans une direction donnée par un hémisphère de l'astre (voir plus loin). Cette énergie par unité de fréquence, de temps, d'angle solide est donnée par

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_\nu \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (1.5)$$

On définit l'intensité spécifique moyenne par

$$\langle I_\nu \rangle = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_\nu \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\pi R^2}. \quad (1.6)$$

La quantité $\langle I_\nu \rangle$ est aussi appelée **brillance de surface**.

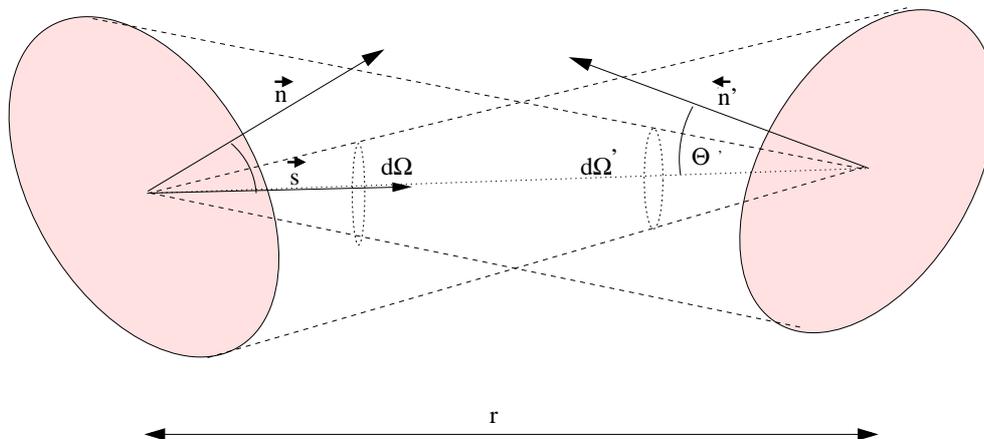


FIG. 1.2 – L'intensité spécifique se conserve dans l'espace vide, cf Eqs. (1.3) et (1.4).

1.3 Le flux

Le flux (monochromatique) est la quantité d'énergie (émise ou reçue) traversant, par unité de temps, une surface unité, dans toutes les directions. Le flux monochromatique émis dans l'angle solide $d\Omega$ seulement vaut

$$dF_\nu = \frac{dU_\nu}{d\sigma dt d\nu} = I_\nu \cos \theta d\Omega. \quad (1.7)$$

Le **flux monochromatique** F_ν (ou **densité de flux**³) est donné par

$$F_\nu = \int_{d\Omega} I_\nu \cos \theta d\Omega. \quad (1.8)$$

Le flux bolométrique vaut $F = \int_0^\infty F_\nu d\nu$. Les flux observés sont habituellement petits et les unités $[\text{W m}^2]$ sont des unités en général peu adaptées à leurs mesures. C'est pourquoi en radio astronomie, les densités de flux sont souvent exprimées en *Jansky*; un *Jansky* est égal à $10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$.

QUESTION 1 : Si le rayonnement est isotrope, que vaut le flux ?

³La densité de flux est un terme peu employé dans la littérature. On trouvera plutôt flux ou intensité. L'usage de ces différents termes pour désigner une même quantité physique invite à la prudence. Il vaut la peine de vérifier chaque fois la signification de ces termes. Dans ce cours nous parlerons de flux.

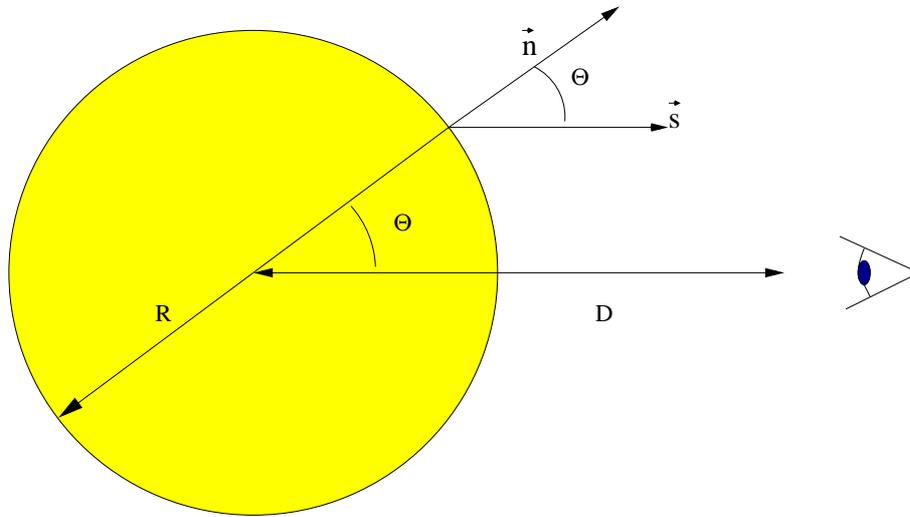


FIG. 1.3 – *Energie rayonnée dans une direction par une étoile, cf Eq.(1.5).*

Le flux total dépend des écarts à l'isotropie

1.3.1 Les flux entrant et sortant

Le flux peut se décomposer en un flux entrant et sortant.

$$F_\nu = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^\pi I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (1.9)$$

Le flux sortant est défini par

$$F_\nu^+ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (1.10)$$

Si le flux est isotrope le flux sortant est égal au flux entrant défini par

$$F_\nu^- = \int_0^{2\pi} \int_\pi^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (1.11)$$

En regardant simplement les définitions, on voit que $F_\nu^+ = \pi \langle I_\nu \rangle$.

QUESTION 2 : *Quelle est l'expression du flux sortant dans le cas isotrope ?*

1.4 La luminosité d'un astre

La **luminosité** (monochromatique) d'un astre est l'énergie émise par cet astre dans toutes les directions par unité de temps (et de fréquence). On peut commencer par donner une expression pour l'énergie émise par une surface $d\sigma$ dans un angle solide $d\Omega$ autour d'une direction faisant un angle θ avec la normale à cette surface

$$dL_\nu = \frac{dU_\nu}{dt d\nu} = I_\nu \cos \theta d\sigma d\Omega. \quad (1.12)$$

$$L = \int_{\text{surface}} \int_{\Omega^+} I_\nu \cos \theta d\sigma d\Omega = \int_{\text{surface}} F_\nu^+ d\sigma = 4\pi R^2 F_\nu^+, \quad (1.13)$$

où le symbole Ω^+ signifie que l'intégration est calculée sur l'ensemble des directions sortantes. La luminosité bolométrique vaut

$$L = \int_\nu L_\nu d\nu = 4\pi R^2 F^+. \quad (1.14)$$

Nous avons supposé ici que l'astre a une symétrie sphérique et que le flux sortant est le même en chaque point de la surface. La magnitude bolométrique absolue⁴ est définie par

$$M_{\text{bol}} = -2.5 \log L + \text{constante} = -2.5 \log L/L_\odot + 4.75. \quad (1.15)$$

QUESTION 3 : *Quelle est la magnitude bolométrique du Soleil ?*

1.5 Eclairement

L'**éclairement** dû à une source lumineuse, E_ν , est le flux reçu de cette source par unité de surface. Si le récepteur a une surface $d\sigma$ et si la source de rayon R se trouve à une distance D , alors on a que l'énergie reçue par le détecteur, de surface $d\sigma$, est égal à l'énergie émise par l'astre dans une direction donnée multipliée par l'angle solide sous-tendu par le récepteur vu depuis l'astre, soit

$$dU_\nu = \pi R^2 \langle I_\nu \rangle d\sigma / D^2. \quad (1.16)$$

⁴La magnitude absolue d'un astre est la magnitude apparente (cf. Sect. 1.5) qu'aurait cet astre s'il était placé à une distance de 10 pc de l'observateur.

L'énergie reçue par unité de surface vaut donc

$$E_\nu = \pi R^2 \langle I_\nu \rangle / D^2 = \delta\Omega_{\text{source}} \langle I_\nu \rangle, \quad (1.17)$$

où $\delta\Omega_{\text{source}}$ est l'angle solide sous-tendu par la source vue depuis le récepteur. Au lieu de l'angle solide de la source, on peut aussi faire apparaître le diamètre angulaire α de la source égal à $2R/D$. Dans ce cas $E_\nu = \pi \frac{\alpha^2}{4} \langle I_\nu \rangle$. On peut aussi, au lieu de l'intensité spécifique moyenne, introduire le flux sortant $F_\nu^+ = \pi \langle I_\nu \rangle$. Dans ce cas,

$$E_\nu = \frac{\alpha^2}{4} F_\nu^+. \quad (1.18)$$

La magnitude apparente est définie par

$$m_\nu = -2.5 \log E_\nu + \text{constante}. \quad (1.19)$$

Par convention on associe à la magnitude zéro un certain éclairement E_0 . Notons que lorsque l'on parle de magnitude, il faut spécifier le domaine de longueur d'onde considéré. A la lumière du jour, l'oeil humain est le plus sensible au rayonnement ayant une longueur d'onde d'environ 550 nm, la sensibilité décroît vers le rouge et le violet. La magnitude correspondant à la sensibilité de l'oeil humain est la magnitude visuelle m_v . Différentes magnitudes ont différents points zéro⁵.

QUESTION 4 : *Montrer que $m_{\text{bol}} - M_{\text{bol}} = 5 \lg D - 5$, où D est la distance de l'astre exprimée en parsecs. Cette expression est aussi valable pour des magnitudes définies sur un intervalle de fréquences. Par contre elle suppose qu'il n'y a pas d'absorption de rayonnement dans le milieu interstellaire ?*

L'origine du facteur 2.5 dans l'Eq.(1.19) est la suivante : au deuxième siècle avant J.C., Hipparque classa les étoiles visibles en six catégories selon leur éclairement apparent. La première classe contenait les étoiles les plus brillantes et la sixième, les étoiles juste visibles à l'oeil nu. La réponse de l'oeil

⁵Les constantes dans le cas du système photométrique UBV ont été choisies de telle manière à ce que les indices de couleurs $B - V = m_B - m_V$, m_B étant la magnitude apparente mesurée au travers du filtre B , et $U - B$ soient zéro pour les étoiles de type spectral A0. La température effective de ces étoiles est environ 10 000 K. Par exemple, Vega (α Lyr, type spectral A0) a $V = 0.03$, $B - V = U - B = 0.00$. Le Soleil a $V = -26.8$, $B - V = 0.66$ et $U - B = 0.10$

OBJET	m_V
Soleil	-26.8
Pleine Lune	-12.5
Vénus (maximum)	-4.4
Sirius	-1.4
α Centauri	0
magnitude limite à l'oeil nu	6
au jumelle	10
quasar le plus lumineux	12.6
magnitude limite à un télescope de 1 m	17
magnitude limite à un télescope de 5 m	25
Objets les moins lumineux détectés dans le Hubble Deep Field	30

TAB. 1.1 – *Magnitude apparente visuelle de quelques objets*

humain à l'éclairement n'est pas linéaire. Si le flux de trois étoiles varie dans les proportions 1 : 10 : 100, la différence d'éclat, de brillance ou d'éclairement entre la première et la seconde et entre la seconde et la troisième paraîtra identique. Des *rappports* d'éclats identiques correspondent à des *différences* d'éclats perçus identiques. L'oeil humain est sensible au logarithme de l'éclat.

En 1856, Norman R. Pogson remplaça la classification d'Hipparchos par une classification plus quantitative. Cette classification suit néanmoins d'assez près celle d'Hipparque. Pogson est parti de la constatation qu'une étoile de première magnitude selon Hipparchos est environ 100 fois plus brillante qu'une étoile de la sixième magnitude. Ainsi il définit le rapport des éclats entre les magnitudes n et $n + 1$ comme 2.512 car $2.512^5 = 100$.

QUESTION 5 : *Montrer que la définition donnée par l'Eq. (1.19) est équivalente à la définition de Pogson.*

Les magnitudes s'étendent dans les deux sens au-delà des magnitudes 1 à 6. La magnitude visuelle apparente de l'étoile la plus brillante Sirius est de -1.4. La magnitude du Soleil est de -26.8 et celle de la Lune de -12.5. La magnitude limite du VLT est de 28.5. Cela signifie qu'une supergéante bleue peut être vue jusqu'à 200 Mpc.

Comment calculer la magnitude limite d'un télescope de diamètre D

Lorsqu'un astre est à la magnitude limite d'un télescope, cela signifie que

l'énergie collectée par le télescope par unité de temps est égale à l'énergie collectée par unité de temps par l'oeil nu à la magnitude limite de l'oeil nu. Si E_v est l'éclairement reçu d'un astre de magnitude 6 et si E_L est l'éclairement d'un astre à la magnitude limite du télescope, on a

$$E_v \pi (0.007/2)^2 = E_L \pi (D/2)^2,$$

où l'on a considéré que le diamètre de la pupille de l'oeil est de 7mm, D étant le diamètre du télescope en mètres. A partir de l'égalité ci-dessus, de la définition de la magnitude et du fait que $-2.5 \log E_v/E_0 = 6$ où E_0 est un éclairement de référence, on obtient m_L la magnitude limite du télescope

$$m_L = 16.8 + 5 \log(D[\text{metres}]).$$

Comment calculer la magnitude apparente d'un système double

Supposons un système d'étoiles doubles, dont une composante a la magnitude apparente 1 et l'autre composante la magnitude apparente 2. Quelle est la magnitude apparente du système ?

Ce qui s'ajoute ce ne sont pas les magnitudes mais les éclairements. On a que

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= -2.5 \log(E_1/E_2) \rightarrow 1 = -2.5 \log(E_1/E_2) \rightarrow 10^{-0.4} = (E_1/E_2), \\ E_1 &= 10^{-0.4} E_2 = 0.4 E_2, \\ E_{1+2} &= E_1 + E_2 = 1.4 E_2 \rightarrow m_{1+2} - m_2 = -2.5 \log(E_{1+2}/E_2) \\ &\rightarrow m_3 = 1 - 2.5 \log(1 + 10^{-0.4}) = 0.64. \end{aligned}$$

1.6 Densité d'énergie du rayonnement

L'énergie qui a traversé la surface $d\sigma$ dans une direction faisant un angle θ avec la normale pendant le temps dt vaut :

$$\frac{dU_\nu}{d\nu d\Omega} = I_\nu \cos \theta d\sigma dt. \quad (1.20)$$

Cette énergie est contenue dans un volume égal à $c dt d\sigma \cos \theta$ (cf Fig. 1.4). Donc la **densité d'énergie du rayonnement** se propageant dans la direction indiquée est

$$\frac{dU_\nu}{d\nu d\Omega c dt d\sigma \cos \theta} = \frac{du_\nu}{d\nu d\Omega} = \frac{I_\nu}{c}. \quad (1.21)$$

Où $du_\nu = \frac{dU_\nu}{c dt d\sigma \cos \theta}$.

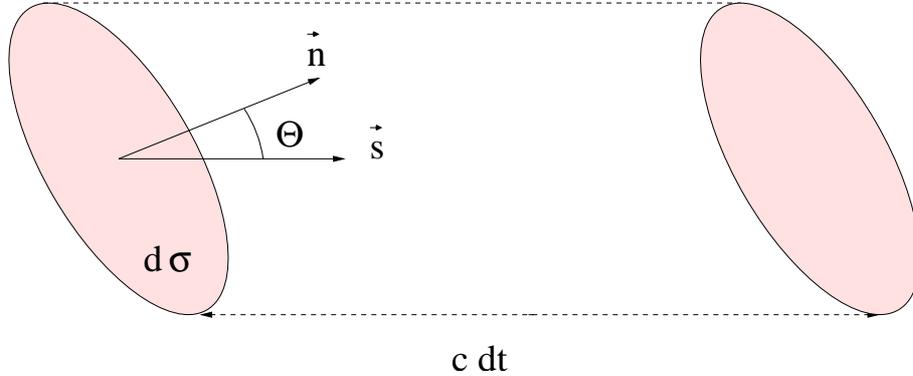


FIG. 1.4 – Volume contenant l'énergie sous forme de rayonnement donnée par l'équation (1.20).

La densité d'énergie associée au rayonnement se propageant dans toutes les directions est donnée par

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int_{\Omega} I_\nu d\Omega. \quad (1.22)$$

La densité d'énergie peut être intégrée sur les fréquences

$$u = \int_{\nu} u_\nu d\nu. \quad (1.23)$$

Comme ν et Ω sont en principe indépendants

$$u = \frac{1}{c} \int_{\Omega} I d\Omega. \quad (1.24)$$

Dans le cas isotrope

$$u = \frac{4\pi}{c} I. \quad (1.25)$$

1.7 Généralités sur la pression

Avant d'introduire la notion de pression de rayonnement, rappelons quelques généralités sur la pression. Considérons les collisions élastiques d'atomes de gaz avec les parois d'un récipient (cf Fig. 1.5). L'énergie cinétique est

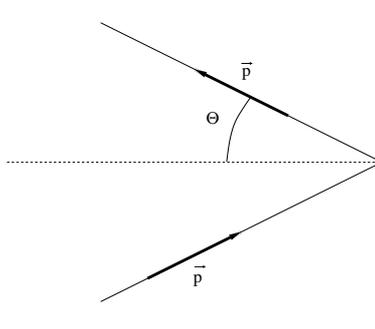


FIG. 1.5 – Lors de la collision d’une particule avec une paroi, la quantité de mouvement dans la direction perpendiculaire à la paroi varie de $2p \cos \theta$.

conservée dans la collision, mais la composante du vecteur quantité de mouvement de la particule perpendiculaire à la paroi change de sens et de direction. Le changement de moment est $\Delta p = 2mv \cos \theta = 2p \cos \theta$.

Pour obtenir la pression, il suffit de calculer le nombre de particules qui entrent en collision avec la paroi par unité de surface et de temps. Le taux de changement de moment dû à ces collisions sera la pression du gaz exercée sur la paroi.

Soit $D(\theta, \varphi, p)d\Omega dp$ le nombre de particules de moment entre p et $p + dp$, frappant la paroi par unité de temps et de surface avec un angle d’incidence entre θ et $\theta + d\theta$ et φ et $\varphi + d\varphi$. La pression exercée par ces particules est donnée par

$$dP = 2p \cos \theta D(\theta, \varphi, p)d\Omega dp. \quad (1.26)$$

La pression totale est alors

$$P = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} p \cos \theta D(\theta, \varphi, p)d\Omega dp. \quad (1.27)$$

Avec $n(\theta, \varphi, p)$ le nombre de particules par unité de volume ayant une quantité de mouvement p et se déplaçant dans la direction donnée par θ et φ (cf Fig. 1.6), $D(\theta, \varphi, p)d\Omega = n(\theta, \varphi, p)d\Omega v \cos \theta$, donc

$$P = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} p v \cos^2 \theta n(\theta, \varphi, p)d\Omega dp. \quad (1.28)$$

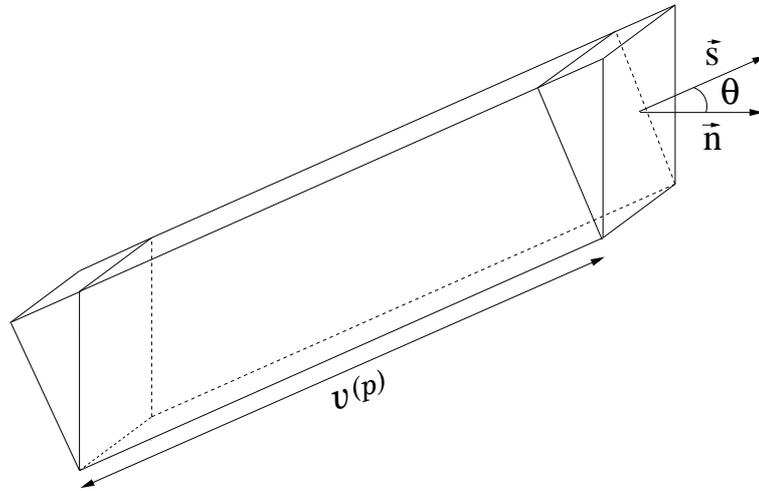


FIG. 1.6 – Volume contenant les particules de vitesses $v(p)$, se propageant dans la direction \mathbf{s} , faisant un angle θ avec la surface unité, qui traverse cette surface unité pendant une unité de temps.

Si l'on suppose que la distribution des directions des vitesses est isotrope, alors

$$n(\theta, \varphi, p)d\Omega = n(p)\frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (1.29)$$

où $n(p)$ est le nombre de particules par unité de volume ayant une quantité de mouvement entre p et $p + dp$. La pression devient en intégrant sur $d\varphi$

$$P = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} pv \cos^2 \theta n(p) \sin \theta d\theta dp \quad (1.30)$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^\infty n(p)pv dp. \quad (1.31)$$

1.7.1 Cas non relativiste (NR)

L'énergie cinétique⁶ pour une particule est donnée par $E_{\text{cin}} = \frac{p^2}{2m}$, la vitesse $v = \frac{p}{m}$. La densité d'énergie cinétique vaut donc

$$u_{\text{cin}} = \int_0^\infty n(p) \frac{p^2}{2m} dp. \quad (1.32)$$

La pression dans le cas isotrope est donnée par

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty n(p) p v dp = \frac{1}{3} \int_0^\infty n(p) \frac{p^2}{m} dp. \quad (1.33)$$

Donc

$$P_{\text{NR}} = \frac{2}{3} u_{\text{cin}}. \quad (1.34)$$

1.7.2 Cas relativiste (R)

Dans le cas relativiste, on a les relations

$$p = \gamma m v, \quad E_{\text{cin}} = (\gamma - 1) m c^2, \quad \gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (1.35)$$

m est la masse au repos et c la vitesse de la lumière, γ le facteur de Lorentz. De la définition de γ , on trouve facilement que

$$v = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} c, \quad (1.36)$$

donc la quantité de mouvement devient

$$p = \gamma m \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} c = m c \sqrt{\gamma^2 - 1}. \quad (1.37)$$

On obtient alors pour le produit $p v$, en utilisant le fait que $E_{\text{cin}} = (\gamma - 1) m c^2$

$$p v = m c \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} c = E_{\text{cin}} \frac{1 + \frac{2m c^2}{E_{\text{cin}}}}{1 + \frac{m c^2}{E_{\text{cin}}}}. \quad (1.38)$$

⁶Il s'agit ici de l'énergie cinétique de translation. Dans le cas de particules composées de plusieurs atomes, l'énergie cinétique totale est l'énergie cinétique de translation plus les énergies cinétiques de vibration et de rotation. Les relations ci-dessus s'appliquent à l'énergie cinétique de translation (cf Berkeley courses, Vol 5, p. 167).

La pression devient alors

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty n E_{\text{cin}} \frac{1 + \frac{2mc^2}{E_{\text{cin}}}}{1 + \frac{mc^2}{E_{\text{cin}}}} dp. \quad (1.39)$$

Dans le cas NR avec $mc^2 \gg E_{\text{cin}}$, on retrouve la relation vue plus haut $P_{\text{NR}} \sim 2/3 n E_{\text{cin}} = 2/3 u_{\text{cin}}$. Dans le cas relativiste avec $mc^2 \ll E_{\text{cin}}$ ou lorsque les particules sont sans masse, on a $P_{\text{R}} = 1/3 n E_{\text{cin}} = 1/3 u_{\text{cin}}$.

Une manière plus rapide d'obtenir ce même résultat est la suivante : dans le cas relativiste, on a que $v \rightarrow c$ et $E_{\text{cin}} \rightarrow pc$. Donc la densité d'énergie cinétique peut s'écrire

$$u_{\text{cin}} = \int_0^\infty n(p) p c dp. \quad (1.40)$$

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty n(p) p c dp. \quad (1.41)$$

Donc

$$P_{\text{R}} = \frac{1}{3} u_{\text{cin}} \quad (1.42)$$

QUESTION 6 : Vérifier la relation $P = \frac{2}{3} u_{\text{cin}}$ dans le cas du gaz parfait.

QUESTION 7 : Montrer que si on a un mélange de particules relativistes et non-relativistes, alors

$$\frac{1}{3} \leq \frac{P}{u_{\text{cin}}} \leq \frac{2}{3} \quad (1.43)$$

QUESTION 8 : La vitesse aléatoire des galaxies est supposée être de l'ordre de 100 km s^{-1} . Leur densité en nombre est $n \sim 10^{-1} \text{ Mpc}^{-3}$. Une galaxie typique a une masse de $3 \cdot 10^{11} \text{ g}$. Quelle est la pression cosmique due aux galaxies ? Cette contribution à la pression a-t-elle un effet sur la dynamique de l'Univers aujourd'hui ?

1.8 La pression de rayonnement

L'expression ci-dessus permet d'obtenir très facilement la pression de rayonnement dans le cas d'un rayonnement isotrope d'intensité spécifique I_0 . En effet il suffit d'appliquer la relation entre la densité d'énergie cinétique de translation et la pression pour le cas de particules relativistes, on obtient

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}u_{\text{cin}} = \frac{1}{3} \frac{4\pi}{c} I_0. \quad (1.44)$$

Dans le cas plus général où le rayonnement n'est pas isotrope, on peut repartir de l'expression générale de la pression

$$P = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} n(\theta, \varphi, p) p v \cos^2 \theta d\Omega dp. \quad (1.45)$$

Dans le cas de photons on a que $v = c$, $p = h\nu/c$, et $n(\theta, \varphi, p)d\Omega dp$ peut être remplacé par

$$n(\theta, \varphi, \nu) d\Omega d\nu = \frac{u_\nu}{h\nu} d\Omega d\nu = \frac{I_\nu}{ch\nu} d\Omega d\nu. \quad (1.46)$$

donc

$$P_{\nu\text{rad}} = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{I_\nu}{ch\nu} \frac{h\nu}{c} c \cos^2 \theta d\Omega d\nu, \quad (1.47)$$

En intégrant sur les fréquences,

$$P_{\text{rad}} = \frac{2}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I \cos^2 \theta d\Omega. \quad (1.48)$$

Ceci correspond à la pression exercée par les impacts des photons sur un des deux côtés de la paroi. Si il y a symétrie par rapport à la paroi, donc si la pression exercée par les photons sur l'autre côté de la paroi est la même, alors on peut écrire

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I \cos^2 \theta d\Omega. \quad (1.49)$$

QUESTION 9 : Vérifier en utilisant la formule ci-dessus que l'on retrouve bien l'expression de P_{rad} dans le cas isotrope.

1.8.1 Les moments de l'intensité spécifique

Définissons le moment d'ordre n de l'intensité spécifique par

$$M_n(I) = \int_{\Omega} I \cos^n \theta d\Omega, \quad (1.50)$$

alors le moment d'ordre 0 donne la densité d'énergie associée au rayonnement multipliée par la vitesse de la lumière uc , le moment d'ordre 1 donne le flux, et le moment d'ordre 2 donne cP_{rad} .

1.9 La pression de rayonnement dans les étoiles *en lecture*

Le texte ci-dessous est tiré du cours de G. Srinivasan (1995) sur les étoiles à neutrons donné dans le cadre du 25 ième cours de Saas Fee "Stellar Remnants". Il illustre l'importance de la notion de pression de rayonnement dans les intérieurs stellaires.

1.9.1 What are the Stars ?

Every now and then there occurs a great revolution in science. By scientific revolution we mean the following : Very often there are questions that arise in science which appear meaningless or even frivolous within the premise of science, and suddenly they acquire a meaning. This constitutes a revolution. One of the great revolutions in science occurred in the middle of last century. To the positivist philosophers who influenced European thinking so much in the 18th and 19th century *it was in the nature of things that we shall never know what the stars are*. And yet, with Fraunhofer's discovery of the absorption lines in the spectrum of the Sun, and their explanation by Kirchoff, a great revolution had occurred. It suddenly became clear that at least the outer layers of the Sun and the stars were gaseous. Soon there were numerous attempts to understand stars as gaseous masses.

Lane was one of the first persons to argue that stars were gaseous masses that were stable because the gravitational pressure was balanced by the pressure of a *perfect gas* viz., Boyle's law. This picture was amplified by Kelvin and Helmholtz. What Lane, Kelvin and Helmholtz argued was that the stability of the Sun must be understood in terms of the equation of hydrostatic

equilibrium .

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

where the pressure is to be calculated from the ideal gas equation of state viz.,

$$P_{gas} = \frac{\rho k T}{\mu m_p}$$

where k is Boltzman's constant, μ the mean molecular weight, and m_p the mass of the proton.

Regarding the source of the heat, Kelvin and Helmholtz argued that it was due to gravitational contraction. However, the serious difficulty with this picture was quickly appreciated. From Virial theorem one could estimate the kinetic energy of the plasma and it was clear that at the present luminosity the Sun will radiate it away in a mere 10^7 years. But various biological and geological evidences pointed to the fact that the Sun must have been radiating roughly at its present luminosity for billions of years. Therefore there must be a continuing source of energy in the Sun. Eddington was the first to suggest (around 1920) that the source of energy may be subatomic or nuclear energy, as we call it today. When he encountered skepticism to this remarkably prescient idea he is known to have remarked "what is possible in the Cavendish Laboratory cannot be too complicated for a star", and "how else can we produce the observed helium in the Universe?".

In the early 1920s Eddington made a major modification to the 19th century principles of stellar structure. He invoked the idea of *radiative equilibrium* (a concept introduced earlier by Karl Schwarzschild), and argued that one must take into account not only the gas pressure but also the pressure of the outward flowing radiation. Thus the total pressure that balances gravity is the sum of gas pressure and radiation pressure. It is worthwhile reminding ourselves of the basic equations of stellar structure for stars in radiative equilibrium.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[\frac{\rho k T}{\mu m_p} + \frac{1}{3} a T^4 \right] &= -\frac{GM(r)\rho}{r^2} \\ \frac{dP_{rad}(r)}{dr} &= -\left(\frac{L(r)}{4\pi r^2 c} \right) \cdot \frac{1}{l} \\ \frac{dL(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \epsilon \rho \end{aligned}$$

where l is the mean free path of the photons, L the luminosity, and ϵ the energy generated per gram of material per unit time.

This theory of the stars due to Eddington was enormously successful (Eddington 1926).

1.9.2 Why are the stars as they are?

Following Eddington we may ask ‘why are the stars as they are?’. To explain the meaning of this cryptic question we may ask in parallel the following question viz., ‘why are the atoms as they are?’, by which we mean : (i) why do the atoms have the sizes they have? (ii) why atoms occur only in a finite range of atomic masses and charges? We may answer these questions by saying the following : Quantum theory is at the base of our understanding of atoms. And this theory naturally provides us with a length scale with which to measure atoms and so on. In a similar fashion we wish to now ask ‘why are the stars as they are?’ viz., (1) why do the luminosities of stars depend only on their masses and not on their radii? (2) why do stars occur only in an incredibly narrow range of masses? (3) why is there a limit to the luminosities of stars?

Eddington’s theory was able to answer all these questions in a convincing manner. Perhaps the most intriguing of all is the second question which concerns the range of masses of stars. Eddington addressed this question and answered it in his famous parable of a physicist on a cloud-bound planet (Eddington 1926). “The outward flowing radiation may be compared to a wind blowing through the star and helping to distend it against gravity. The formulae to be developed later enable us to calculate what proportion of the weight of the material is borne by this wind, the remainder being supported by the gas pressure. To a first approximation the proportion is the same at all parts of the star. It does not depend on the density nor on the opacity of the star. It depends only on the mass and molecular weight. Moreover, the physical constants employed in the calculation have all been measured in the Laboratory, and no astronomical data are required. We can imagine a physicist on a cloud-bound planet who has never heard tell of the star calculating the ratio of radiation pressure to gas pressure for a series of globes of gas of various sizes, starting, say, with a globe of mass 10g, then 100g, 1000g and so on, so that his n th globe contains 10^n g. Table below shows the more interesting part of his results.”

No. of globes	Radiation pressure	Gas pressure
..
..
..
32	0.0016	0.9984
33	0.106	0.894
34	0.570	0.430
35	0.850	0.150
36	0.951	0.049
37	0.984	0.016
38	0.9951	0.0049
39	0.9984	0.0016
..
..
..

“The rest of the Table would consist mainly of long strings of 9’s and 0’s. Just for the particular range of mass about the 33rd to 35th globes the Table becomes interesting, and then lapses back into 9’s and 0’s again. Regarded as a tussle between matter and aether (gas pressure and radiation pressure) the contest is overwhelmingly one-sided except between numbers 33-35, where we may expect something to happen.”

“What ‘happens’ is the stars.”

“We draw aside the veil of cloud beneath which our physicist has been working and let him look up at the sky. There he will find a thousand million globes of gas nearly all of mass between his 33rd and 35th globes – that is to say, between 1/2 and 50 times the Sun’s mass. The lightest known star is about $3 \cdot 10^{32}$ g, and the heaviest about $2 \cdot 10^{35}$ g. The majority are between 10^{33} and 10^{34} g, where the serious challenge of radiation pressure to compete with gas pressure is beginning.”

But why is this tussle important for ‘stars to happen’? Eddington did not elaborate. A deeper understanding of why the masses of stars lie in such a narrow range, although their luminosities vary by million or more, was provided by Chandrasekhar (Chandrasekhar 1937).

Let us introduce the parameter β which is the ratio of the gas pressure

to the total pressure

$$\begin{aligned} P_{tot} &= p_{gas} + p_{rad} \\ &= \frac{1}{\beta} p_{gas} = \frac{1}{1-\beta} p_{rad} \end{aligned}$$

One can now write the total pressure as follows :

$$P_{tot} = \left[\left(\frac{k}{\mu m_p} \right)^4 \cdot \frac{3}{a} \cdot \frac{1-\beta}{\beta^4} \right]^{1/3} \rho^{4/3}$$

Chandrasekhar argued that for a star to be mechanically stable the following inequality has to be satisfied.

$$\frac{1}{2} G \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} M^{2/3} \bar{\rho}^{4/3} \leq P_c \leq \frac{1}{2} G \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} M^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

Here, $\bar{\rho}$ is the mean density and ρ_c the central density. P_c is the sum of gas pressure plus radiation pressure at the centre. The right hand side of the inequality gives the necessary condition for the stability of a star, i.e.

$$\mu^2 M \left(\frac{\beta_c^4}{1-\beta_c} \right)^{1/2} \geq 0.19 \left[\left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{m_p^2} \right]$$

The combination of fundamental constants on the right hand side has the dimension of MASS. Its value is $\approx 29.2M_\odot$. We thus see that in a theory of stars where gravity is balanced by the sum of gas pressure and radiation pressure, the natural *scale of mass* is of stellar magnitude. This is why the stars are as they are! Or, as Chandrasekhar put it :

“We conclude that to the extent the above theory is at the base of the equilibrium of actual stars, to that extent the above combination of natural constants, providing a mass of proper magnitude for the measurement of stellar masses, is at the base of a physical theory of stellar structure.”

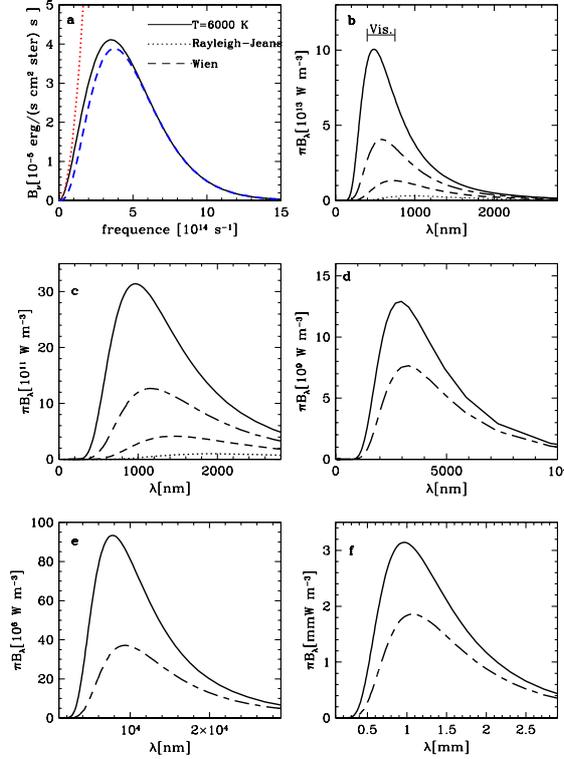


FIG. 1.7 – Exemples de courbes de corps noir : **a** intensité spécifique d'un corps noir à 6000 K en fonction de la fréquence ; **b** flux sortants de corps noirs de température égale à 6000, 5000, 4000 et 3000 K (de haut en bas). Le domaine des longueurs d'onde optiques (de 400 à 750 nm) est indiqué ; **c** idem **b** pour des températures de 3000, 2500, 2000 et 1500 K ; **c** idem **b** pour des températures de 1000 et 900 K. L'émission aux plus courtes longueurs d'onde est dans le domaine visible (couleur rouge) d'où les lueurs rougeâtres émises par les objets portés à ces températures ; **d** idem que **b** pour des températures de 373 K (100 C) et 310 K (37 C). Aux températures usuelles les corps émettent dans le domaine de l'infra-rouge (entre 1000 et 1000000 nm) ; **e** idem **b** pour des températures de 3 et 2.7 K correspondantes aux rayonnement de fond cosmologique.

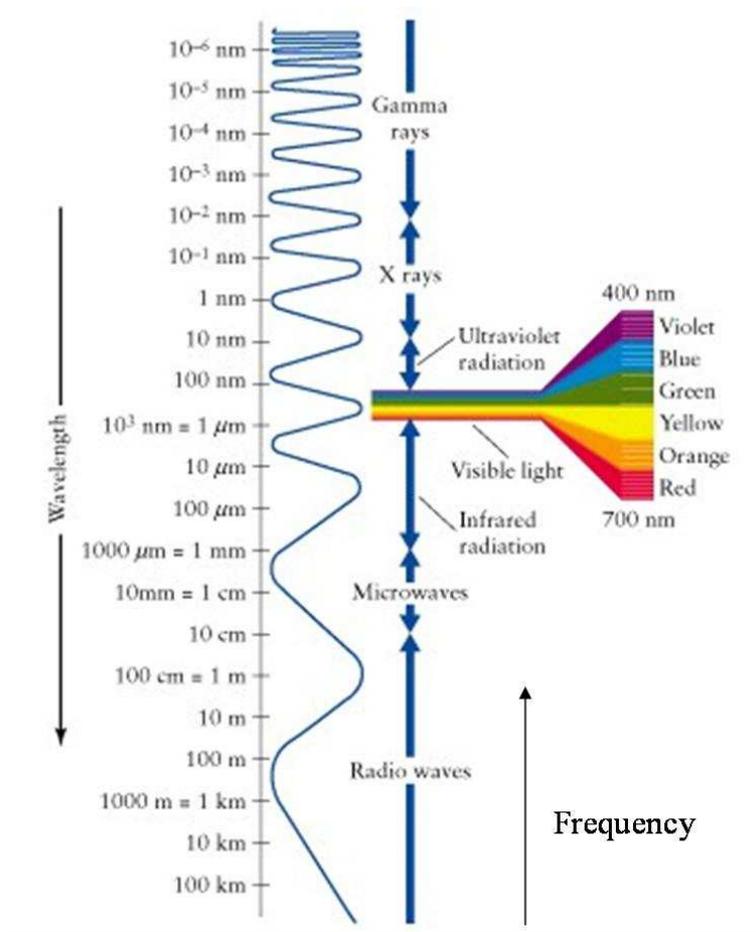


FIG. 1.8 – Intervalles de longueur d'ondes correspondant aux différents types de rayonnement.

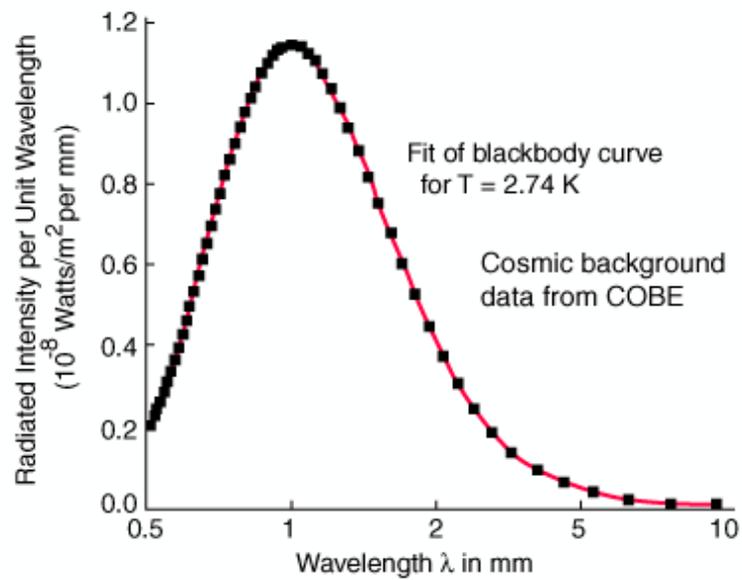


FIG. 1.9 – Rayonnement de fond cosmologique découvert par Penzias et Wilson (titre de l'article qui leur valut le prix Nobel de physique en 1978 : *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*, cf *Astrophysical Journal*, vol. 142, p.419-421, 1965. Tiré de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/bkg3k.html#c1>.

1.10 Le rayonnement du corps noir

A l'état d'équilibre ($T = \text{constante}$) dans une enceinte fermée vide, l'intensité du rayonnement tend vers une valeur constante, fonction de la température et de la fréquence,

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (1.51)$$

On peut aussi définir $B_\lambda d\lambda$.

Aux basses énergies $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$, on a, en utilisant le fait que lorsque x est petit $e^x - 1 \approx x$,

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{kT}{h\nu} = \frac{2\nu^2}{c^2} kT.$$

Il s'agit de la loi de Rayleigh–Jeans . Elle est utilisée en radioastronomie pour définir la température d'antenne T_A à partir de l'intensité radio. Le rayonnement qui se rapproche le plus du corps noir dans la nature est le rayonnement de fond cosmologique .

Aux énergies élevées $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$, on a

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

Il s'agit de l'approximation de Wien . Avant que l'on connaisse la forme exacte du rayonnement du corps noir, Wien avait obtenu la règle suivante appelée loi de Wien

$$\lambda_{\max} T = 0.29 \text{ [cm K]},$$

où λ_{\max} est la longueur d'onde au maximum d'émission.

QUESTION 10 : *Partir de l'approximation de Wien pour $B_\nu(T)$ et montrer que*

$$\lambda_{\max} T = \frac{1}{3} \frac{hc}{k} = 0.48 \text{ [cm K]}.$$

Le facteur $1/3$ devient 0.2014 lorsque l'on part de l'expression complète de la fonction de Planck. Il faut alors résoudre une équation transcendante pour obtenir λ_{\max} (cf Berkeley courses, vol 5, physique quantique, p 27).

En intégrant sur les fréquences, on trouve les expressions suivantes :

$$B = I = \frac{\sigma T^4}{\pi}.$$

$$F^+ = F^- = \sigma T^4.$$

$$u = \frac{4\sigma}{c} T^4 = aT^4.$$

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} aT^4.$$

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ erg}/(\text{cm}^2 \text{ K}^4 \text{ sec})$ est la constante de Stefan–Boltzmann, $a = 7.565 \cdot 10^{-15} \text{ erg}/(\text{cm}^3 \text{ K}^4)$ est la constante de rayonnement.

1.11 La température effective

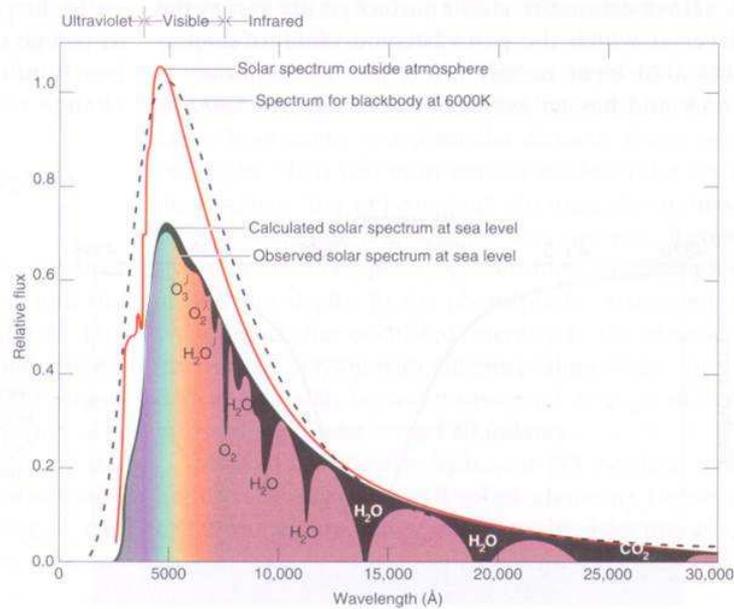


FIG. 1.10 – *Spectre du Soleil.*

Le Soleil n'est pas très loin d'émettre comme un corps noir (cf Fig. 1.10), cependant il ne peut-être considéré comme tel. Son rayonnement provient de couches situées à différentes profondeurs auxquelles on ne peut assigner une température unique. D'autre part, dans les couches extérieures, même localement, il y a des écarts à l'équilibre thermodynamique local. En conséquence, la notion de température associée au rayonnement solaire, ainsi qu'à toute source lumineuse doit être précisée très soigneusement. La température la plus utilisée est la température effective. La température effective d'un astre est la température d'un corps noir ayant le même rayon et émettant la même luminosité que l'astre.

$$T_{\text{eff}}^4 = \frac{L}{4\pi R^2 \sigma}.$$

QUESTION 11 : *A partir de la constante solaire (1360 W/m²) et de la distance Terre-Soleil, ($\sim 150 \cdot 10^6$ km), estimer la température effective du Soleil (le rayon du Soleil est égal à $6.96 \cdot 10^{10}$ cm).*

Il existe d'autres types de températures associées au rayonnement, notamment la température de brillance et la température de couleur . En général, les températures effectives, de couleur, de brillance ne sont pas égales. D'autres températures associées au gaz de particules peuvent être définies, la température cinétique, la température d'excitation, d'ionisation (cf. chapitre 4).

1.11.1 La température d'équilibre de la Terre

L'énergie émise par le Soleil interceptée par la Terre est (cf. Fig. 1.11),

$$\frac{L}{4\pi D^2} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4}{4\pi D^2} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad (1.52)$$

$$= \left(\frac{R}{D}\right)^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2. \quad (1.53)$$

L est la luminosité du Soleil, R son rayon, D la distance Terre–Soleil, d le diamètre de la Terre. Si l'on suppose que la Terre rayonne comme un corps noir, la puissance émise par la Terre vaut

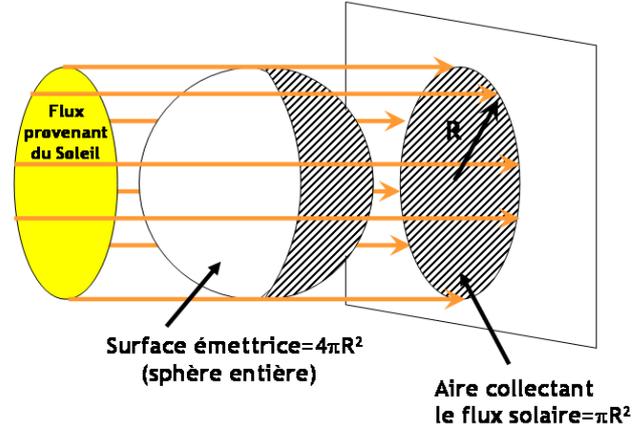


FIG. 1.11 – La Terre intercepte une partie de l'énergie émise par le Soleil.

$$4\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \sigma T^4 \quad (1.54)$$

A l'équilibre, la puissance reçue est égale à la puissance émise, et l'on obtient ainsi la température d'équilibre de la Terre

$$T^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{R}{D}\right)^2 T_{\text{eff}}^4 \implies T = \left(\frac{\Delta\Omega}{4\pi}\right)^{1/4} T_{\text{eff}} \quad (1.55)$$

$\Delta\Omega$ est l'angle solide sous-tendu par le Soleil vu depuis la Terre.

QUESTION 12 : *Calculer T .*

QUESTION 13 : *Si 30% du rayonnement est réfléchi et ne participe pas au réchauffement de la Terre, que devient T ?*

QUESTION 14 : *Les modèles d'évolution du Soleil montrent que le Soleil augmente de brillance d'environ 7% par milliards d'années. Sachant que le Soleil est né il y a 4.56 milliards d'années, quelle serait la température d'équilibre de la Terre il y a 4 milliards d'années ?*

$$\begin{aligned}
 &1) (1-A)S\pi R^2 = H4\pi R^2 \rightarrow H = (1-A)S/4 \\
 &2) 2H = G \rightarrow \sigma(T_A)^4 8\pi R^2 = \sigma(T_T)^4 4\pi R^2 \rightarrow 2\sigma(T_A)^4 = \sigma(T_T)^4 \\
 &3) (1-A)S\pi R^2 + H4\pi R^2 = \sigma(T_T)^4 4\pi R^2 \rightarrow 2(1-A)S = \sigma(T_T)^4 \text{ (idem 2)} \\
 &\text{Avec } A=0.3, S=1370 \text{ W/m}^2, \sigma=5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \text{ K}^4) \rightarrow T_A=255 \text{ K}-18 \text{ C}, T_T=303 \text{ K}-30 \text{ C}
 \end{aligned}$$

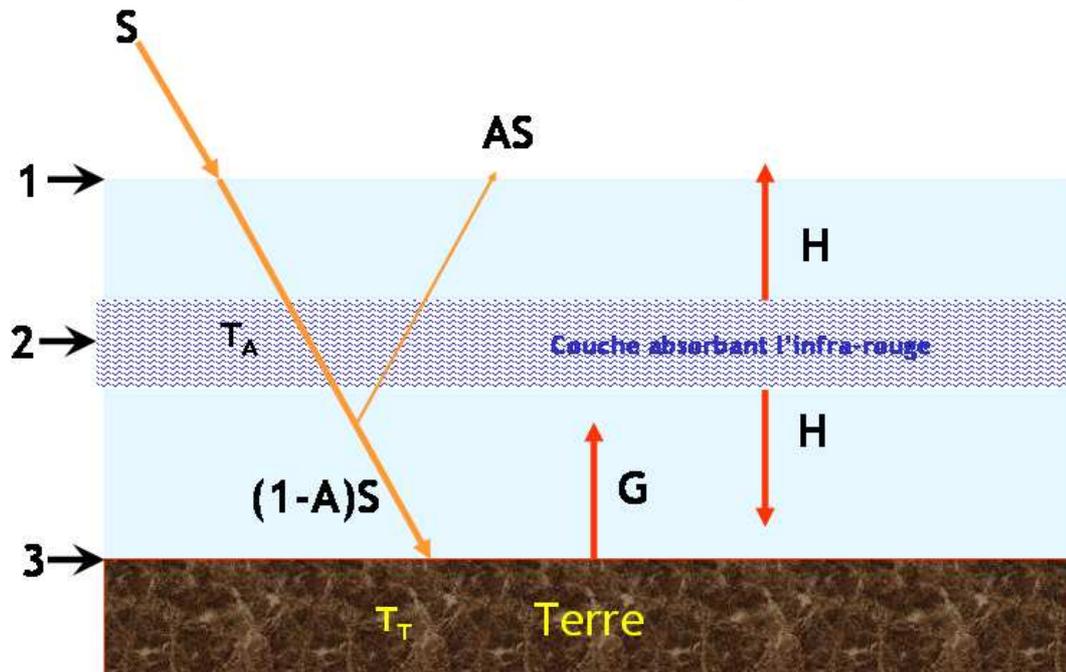


FIG. 1.12 – Principe de l'évaluation de la température d'équilibre de la Terre en présence d'un effet de serre.

La température moyenne de la Terre est plus élevée que les valeurs obtenues ci-dessus. Cela est dû à la présence de gaz à effet de serre dans l'atmosphère terrestre. Les principaux gaz à effet de serre sont la vapeur d'eau, le gaz carbonique et le méthane.

Un tel calcul peut aussi s'appliquer à la détermination de la température des poussières dans le milieu interstellaire

QUESTION 15 : Soit un four solaire constitué d'un récepteur de diamètre d placé au foyer d'un miroir de diamètre $d' \gg d$. Calculer la température d'équilibre du récepteur.

1.12 L'entropie du rayonnement

L'entropie du rayonnement est une grandeur utile en cosmologie pour étudier l'histoire thermique de l'univers et la phase de l'inflation. La première loi de la thermodynamique s'écrit

$$\delta Q = dU + d\tau = dU + PdV, \quad (1.56)$$

où δQ est l'énergie donnée au système et $d\tau$ est le travail fourni par le système. La deuxième loi de la thermodynamique s'écrit

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (1.57)$$

Considérons un milieu où le rayonnement domine $P = P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}aT^4$,

$$TdS = d(uV) + PdV = 4aT^3VdT + \frac{4}{3}aT^4dV \quad (1.58)$$

$$dS = d\left(\frac{4}{3}aT^3V\right) \implies S = \frac{4}{3}aT^3V \quad (1.59)$$

On a posé la constante d'intégration égale à zéro. L'entropie par unité de volume est $s = \frac{4}{3}aT^3$

Cherchons maintenant le lien entre l'entropie du rayonnement et le nombre de photons dans un volume donné.

QUESTION 16 : *Montrer qu'à l'équilibre, le nombre de photons par unité de volume avec une longueur d'onde entre λ et $\lambda + d\lambda$ vaut*

$$dn_\gamma(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{d\lambda}{\exp\frac{hc}{\lambda kT} - 1}. \quad (1.60)$$

Utiliser la relation $du_\nu = \frac{4\pi I_\nu}{c} d\nu$, la fonction de Planck et le fait que $c = \lambda\nu$.

Le nombre total de photons par unité de volume est

$$n_\gamma = \int_0^\infty dn_\gamma = 0.37 \frac{aT^3}{k} \frac{\text{photons}}{\text{cm}^3}. \quad (1.61)$$

Dans un volume V donné, l'entropie vaut

$$S = \frac{4}{3} \frac{k}{0.37} n_\gamma V = \frac{4}{3} \frac{k}{0.37} N_\gamma. \quad (1.62)$$

Dans un volume donné, l'entropie est proportionnelle au nombre de photons qu'il contient.

QUESTION 17 : *Que vaut l'entropie d'un mélange de gaz et de photons ? Supposer que le gaz obéit à la loi des gaz parfaits. Dans ce cas l'énergie $U = \frac{3}{2}NkT + aT^4V$ et $P = \frac{N}{V}kT + \frac{1}{3}aT^4$. On trouve dans ce cas que*

$$S = \frac{4}{3}aT^3V + Nk \ln(T^{3/2}V) = 3.604kn_\gamma V + Nk \ln(T^{3/2}V). \quad (1.63)$$

Dans un volume donné, lors d'un changement de température, l'entropie varie essentiellement avec le nombre de photons.

Les étoiles par leur rayonnement évacue de l'entropie dans le milieu inter-stellaire ⁷. Ce rayonnement a un effet négligeable sur l'entropie de l'univers. L'entropie de l'univers demeure donc constante au cours de l'expansion.

QUESTION 18 : *Calculer le nombre de photons par cm^3 associé au rayonnement cosmique et la densité (par exemple en $g\ cm^3$) qui peut être associée à ce rayonnement.*

⁷Cette émission d'entropie modifie l'entropie à l'intérieur de l'étoile. Son entropie dans les régions intérieures diminue au cours du temps.

Domaine de longueur d'onde	Densité d'énergie de rayonnement [eV/m ³]	Densité en nombre de photons [m ³]
radio	$\sim 5 \times 10^{-2}$	$\sim 10^6$
micro-ondes	3×10^5	5×10^8
infra-rouge	?	?
visible	$\sim 2 \times 10^3$	$\sim 10^3$
ultra-violet	?	?
rayons X	75	3×10^{-3}
rayons γ	25	3×10^{-6}

TAB. 1.2 – *Densité d'énergie et densité en nombre de photons de rayonnements dans différents domaines de longueur d'onde. Ce ne sont que des ordres de grandeur (Longair, cours de Saas-Fee 1995).*

Chapitre 2

Transfert d'énergie rayonnante

Le transport de l'énergie dans un milieu peut se faire essentiellement par trois moyens

- L'énergie peut être transportée par le rayonnement électromagnétique, on parle alors de transfert radiatif.
- L'énergie peut être transportée par le mouvement macroscopique de la matière, il s'agit du transfert convectif.
- L'énergie peut être transportée par le mouvement microscopique de la matière, plus précisément par le mouvement des électrons, on parle alors de transport par la conduction.

Ces transferts auront toujours tendance à égaliser la température, c'est-à-dire à transporter de l'énergie des régions plus chaudes aux régions plus froides. Lorsqu'un état stationnaire est atteint, c'est-à-dire lorsque les températures ont atteint leur valeur d'équilibre, on obtient, selon le mécanisme de transport dominant (radiatif, convectif ou conductif) des gradients de température différents. C'est à la recherche de ces gradients de températures que s'attache le présent chapitre, ainsi qu'à la recherche des conditions dans lesquelles chacun de ces trois mécanismes domine.

L'équation de transfert est une équation qui exprime le fait que la différence d'énergie entre l'énergie qui sort d'un élément de volume et l'énergie qui y pénètre est égal à l'énergie produite dans l'élément de volume moins l'énergie absorbée dans l'élément de volume. Dans le cas du transfert radiatif, cette équation nécessite donc de connaître les coefficients d'émission et d'extinction du rayonnement.

2.1 Coefficient d'extinction

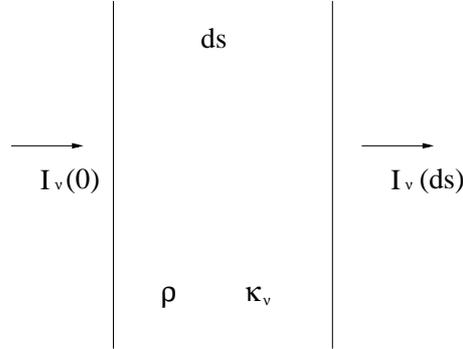


FIG. 2.1 – Le rayonnement traverse une plaque d'épaisseur ds , de densité ρ . L'équation 2.1 définit le coefficient d'absorption κ_ν .

Lorsqu' un rayonnement traverse de la matière, il subit une atténuation dI_ν proportionnelle à I_ν et à la densité de colonne ρds . Le coefficient κ_ν , tel que

$$dI_\nu = -\kappa_\nu I_\nu \rho ds \quad (2.1)$$

est le coefficient d'extinction . Ses unités sont des cm^2/g . Il résulte de divers processus physiques intervenant dans le milieu (voir chapitre 3). Si κ_ν et ρ sont constants dans le milieu, on a

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu \rho I_\nu \implies I_\nu(s) = I_\nu(s_0) e^{-\kappa_\nu \rho (s-s_0)}. \quad (2.2)$$

La quantité $l = \frac{1}{\kappa_\nu \rho}$, qui est la distance après laquelle l'intensité est réduite d'un facteur e , est le libre parcours moyen. Dans l'intérieur du Soleil l varie entre 0.01 et 1 cm.

L'énergie absorbée lorsque le rayonnement a un angle d'incidence θ est

$$dU_\nu^{\text{abs}} = |dI_\nu| d\nu d\sigma \cos \theta d\Omega dt \quad (2.3)$$

$$= \kappa_\nu \rho I_\nu d\nu ds d\sigma \cos \theta d\Omega dt. \quad (2.4)$$

Comme $\rho ds d\sigma \cos \theta$ est la masse traversée dm , on a

$$dU_\nu^{\text{abs}} = \kappa_\nu I_\nu d\nu dm d\Omega dt. \quad (2.5)$$

REMARQUE

L'extinction comporte en générale une partie absorption et une partie diffusion $\kappa_\nu^{\text{tot}} = \kappa_\nu^{\text{diff}} + \kappa_\nu^{\text{abs}}$. L'énergie diffusée dans une direction θ' par rapport à la direction d'incidence est

$$dU_\nu^{\text{diff}} = \kappa_\nu^{\text{diff}} I_\nu dm d\nu d\Omega dt \frac{d\Omega'}{4\pi} p^{\text{diff}}(\cos \theta'), \quad (2.6)$$

la fonction $p^{\text{diff}}(\cos \theta')$ est la fonction de phase. La fonction de phase est normalisée de manière à ce que $\int p^{\text{diff}}(\cos \theta') \frac{d\Omega'}{4\pi} = 1$. La fonction de phase de Rayleigh, qui s'applique au cas ordinaire de la diffusion Thomson est donnée par

$$p = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta). \quad (2.7)$$

Dans le cas d'une diffusion isotrope $p^{\text{diff}} = 1$. On appelle albédo de diffusion ou degré de blancheur la quantité

$$a_\nu^{\text{diff}} = \frac{\kappa_\nu^{\text{diff}}}{\kappa_\nu^{\text{tot}}} = \frac{U_\nu^{\text{diff}}}{U_\nu^{\text{diff}} + U_\nu^{\text{abs}}}. \quad (2.8)$$

2.1.1 L'extinction atmosphérique

La Fig. 2.2 illustre la transparence de l'atmosphère terrestre à différentes longueurs d'onde.

L'extinction atmosphérique (absorption + diffusion) est généralement représentée au premier ordre par

$$m_z(\lambda) = m_0(\lambda) + K_\lambda \sec z + \dots \quad (2.9)$$

où m_0 est la magnitude hors atmosphère (cf. Fig. 2.3), m_z est la magnitude mesurée au sol à la distance zénithale z , K_λ le coefficient d'extinction. Cette expression est valable si la distance zénithale z n'est pas trop grande. Dans ce cas il est légitime de négliger la courbure de l'atmosphère. Si l'épaisseur de l'atmosphère est prise comme unité la quantité $\sec z$ représente la distance parcourue par la lumière dans l'atmosphère. La magnitude augmente linéairement avec la distance.

A la place de $\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{d}{d_0}$, on utilise F_z , la masse d'air qui tient compte de la courbure de la Terre et de l'altitude du lieu d'observation (valeurs tabulées). On a donc la relation suivante entre l'intensité spécifique hors de l'atmosphère I_0 et l'intensité I_z mesurée au sol à la distance zénithale z

$$I_z(\lambda) = I_0(\lambda) 10^{-0.4\kappa_\lambda F_z}. \quad (2.10)$$

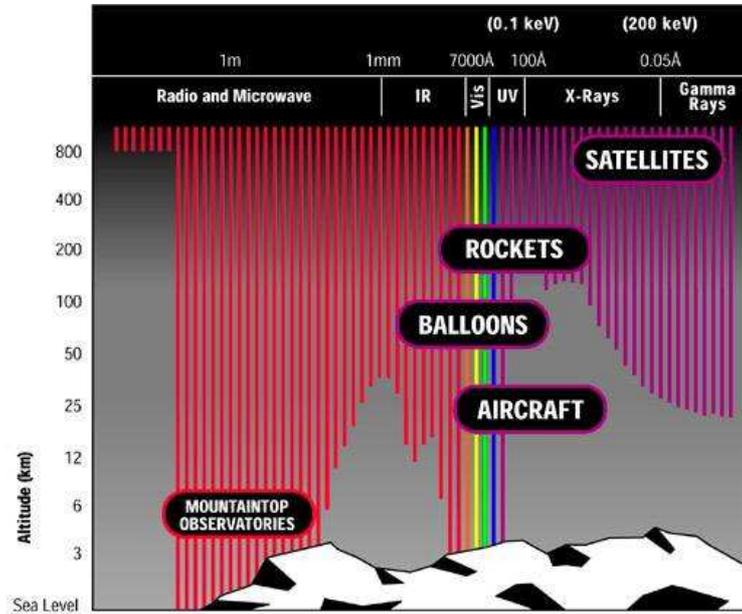


FIG. 2.2 – L’atmosphère n’est transparente qu’aux ondes visibles et radio.

QUESTION : *Montrer l’expression ci-dessus.*

Le coefficient d’extinction peut être déterminé en observant la même source plusieurs fois durant une nuit avec des distances zénithales aussi différentes que possible (toutefois pas supérieures à 70°). Les magnitudes observées sont portées dans un diagramme magnitudes versus masses d’air. Les points sont sur une droite dont la pente est le coefficient d’extinction. L’extrapolation de la droite jusqu’au point où la masse d’air est nulle, permet d’obtenir m_0 qui est la magnitude apparente hors atmosphère.

2.2 Coefficient d’émission

Un élément de masse peut aussi émettre spontanément des photons (par production d’énergie nucléaire par exemple). On définit le coefficient d’émission par

$$dU_\nu^{\text{emi}} = j_\nu d\nu dm d\Omega dt. \quad (2.11)$$

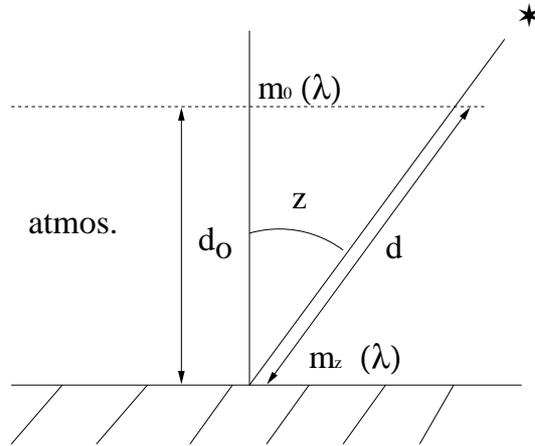


FIG. 2.3 – Si la distance zénithale d'un astre est z , sa lumière traverse une distance $d_0/\cos z$ dans l'atmosphère.

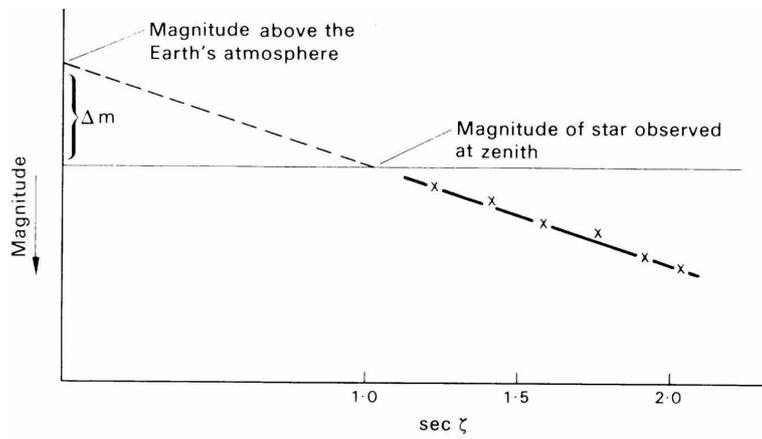


FIG. 2.4 – Magnitudes observées en fonction de la masse d'air.

2.3 La loi de Kirchhoff

Considérons une enceinte isolée d'un certain type en équilibre thermique à une température donnée T . La quantité d'énergie totale absorbée (intégrée sur toutes les fréquences) par les parois doit être égale à l'énergie totale qu'elle émet, sinon la température des parois T changerait. Kirchhoff a affirmé que le même bilan devrait s'appliquer pour chaque fréquence¹, donc

$$dU_\nu^{\text{abs}} = dU_\nu^{\text{emi}} \quad (2.12)$$

avec

$$dU_\nu^{\text{abs}} = \kappa_\nu I_\nu d\nu dm d\Omega dt, \quad (2.13)$$

$$dU_\nu^{\text{emi}} = j_\nu d\nu dm d\Omega dt, \quad (2.14)$$

L'énergie absorbée à la fréquence ν à savoir $\kappa_\nu I_\nu$, doit être identique à l'énergie émise j_ν , et cela doit être vrai pour tous les matériaux quelle que soit leur nature. C'est la loi de Kirchhoff

$$j_\nu = \kappa_\nu I_\nu. \quad (2.15)$$

La fonction I_ν est donc une fonction universelle, c'est-à-dire la même quelle que soit la nature des parois, leur couleur, leur taille et leur forme². Il s'agit du rayonnement du corps noir.

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}. \quad (2.16)$$

Remarque : milieu avec indice de réfraction variable

Que se passe-t-il si l'on a deux milieux de nature différentes dans une enceinte à température constante ? Supposons que les deux milieux aient des indices de réfraction n_ν et n'_ν . Considérons un élément de surface $d\sigma$ prise sur l'interface entre ces deux milieux (cf Fig. 2.5). On a alors

$$dU_\nu^{\text{inc}} = I_\nu d\sigma \cos \theta d\Omega d\nu dt, \quad (2.17)$$

¹Si les parois sont faites de matériaux différents (qui se comportent différemment avec T), le régime stationnaire nécessite l'équilibre pour chaque fréquence.

²En 1792, le fameux céramiste Thomas Wedgwood remarqua que les objets dans un four devenaient rouges en même temps que les parois du four quelle que soit leur taille, leur forme et leur matériau.

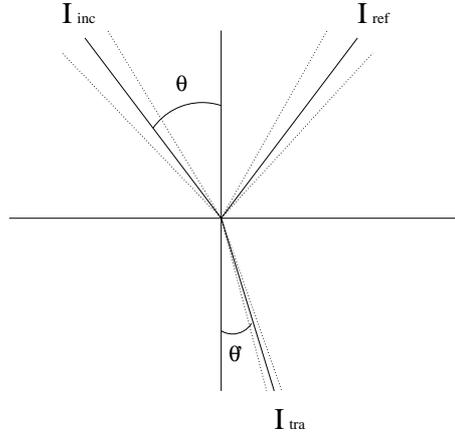


FIG. 2.5 – Interface entre deux milieux d'indice de réfraction différent.

$$dU_\nu^{\text{ref}} = r_\nu I_\nu d\sigma \cos \theta d\Omega d\nu dt, \quad (2.18)$$

$$dU_\nu^{\text{tra}} = (1 - r_\nu) I'_\nu d\sigma \cos \theta' d\Omega' d\nu dt, \quad (2.19)$$

avec $r_\nu < 1$ le pouvoir réflecteur. Si $r_\nu = 0$, $I_\nu \neq I'_\nu$ car θ' et $d\Omega'$ sont différents. La conservation de l'énergie à la fréquence ν implique que

$$I_\nu d\sigma \cos \theta d\nu d\Omega dt = r_\nu I_\nu d\sigma \cos \theta d\nu d\Omega dt + (1 - r_\nu) I'_\nu d\sigma \cos \theta' d\nu d\Omega' dt, \quad (2.20)$$

ce qui implique que

$$I_\nu \cos \theta d\Omega = I'_\nu \cos \theta' d\Omega' \implies I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta = I'_\nu \cos \theta' \sin \theta' d\theta'. \quad (2.21)$$

La loi de la réfraction implique que

$$n_\nu \sin \theta = n'_\nu \sin \theta' \implies n_\nu \cos \theta d\theta = n'_\nu \cos \theta' d\theta', \quad (2.22)$$

donc

$$I_\nu \frac{n'_\nu}{n_\nu} \frac{n'_\nu}{n_\nu} = I'_\nu \implies \frac{I_\nu}{n_\nu^2} = \frac{I'_\nu}{n'^2_\nu}. \quad (2.23)$$

Dans un milieu avec un indice de réfraction variable on a constance de I_ν/n_ν^2 . Si l'équilibre est atteint, on a que

$$\frac{I_\nu}{n_\nu^2} = \frac{I'_\nu}{n'^2_\nu} = B_\nu(T) \implies I_\nu = n_\nu^2 B_\nu(T). \quad (2.24)$$

On peut aussi écrire le coefficient d'émission d'un milieu en équilibre thermique d'indice n_ν ,

$$j_\nu = \kappa_\nu n_\nu^2 B_\nu(T). \quad (2.25)$$

Si le milieu est vide, on peut introduire un pouvoir réflecteur des parois, tel que à l'équilibre

$$I_\nu = r_\nu I_\nu + e_\nu \implies I_\nu = \frac{e_\nu}{1 - r_\nu} = \frac{e_\nu}{a_\nu}. \quad (2.26)$$

Si la paroi est noire, parfaitement absorbante $a_\nu = 1$ et $I_\nu = e_\nu$. Si $a_\nu = 0$, cas d'un miroir, I_ν est indéterminé, il y a équilibre à n'importe quelle intensité.

2.4 L'équation de transfert

Soit un pinceau de rayonnement monochromatique I_ν dans une direction \mathbf{s}_0 . Le milieu est défini par ρ , κ_ν et j_ν (voir Fig. 2.6, on choisit un élément de surface perpendiculaire à la direction choisie).

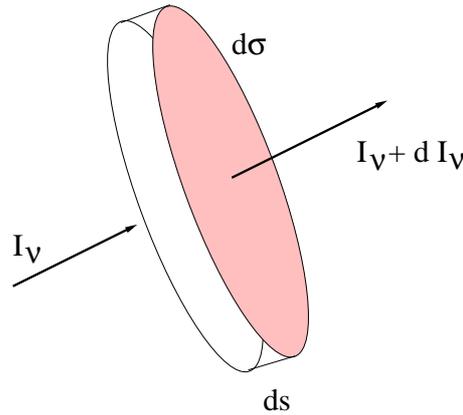


FIG. 2.6 –

La variation d'énergie pendant la durée dt vaut

$$dU_\nu = dI_\nu d\nu d\sigma d\Omega dt \quad (2.27)$$

Si ds est l'épaisseur traversée, la quantité d'énergie émise vaut

$$dU_\nu^{\text{emi}} = j_\nu \rho d\sigma ds d\nu d\Omega dt \quad (2.28)$$

la quantité d'énergie absorbée vaut

$$dU_\nu^{\text{abs}} = \kappa_\nu \rho I_\nu d\sigma ds d\nu d\Omega dt \quad (2.29)$$

le bilan net s'écrit

$$dU_\nu = dU_\nu^{\text{emi}} - dU_\nu^{\text{abs}} \implies \frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu \rho - \kappa_\nu \rho I_\nu \quad (2.30)$$

Il s'agit de l'équation de transfert radiatif. Dans le cas d'un milieu à géométrie sphérique (Fig. 2.7) $dr = ds \cos \theta$ et $-r d\theta = ds \sin \theta$, donc

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \quad (2.31)$$

L'équation de transfert en coordonnées sphériques s'écrit donc

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial I_\nu}{r \partial \theta} \sin \theta = \rho(j_\nu - \kappa_\nu I_\nu) \quad (2.32)$$

Une équation similaire peut être écrite pour $I = \int_\nu I_\nu d\nu$.

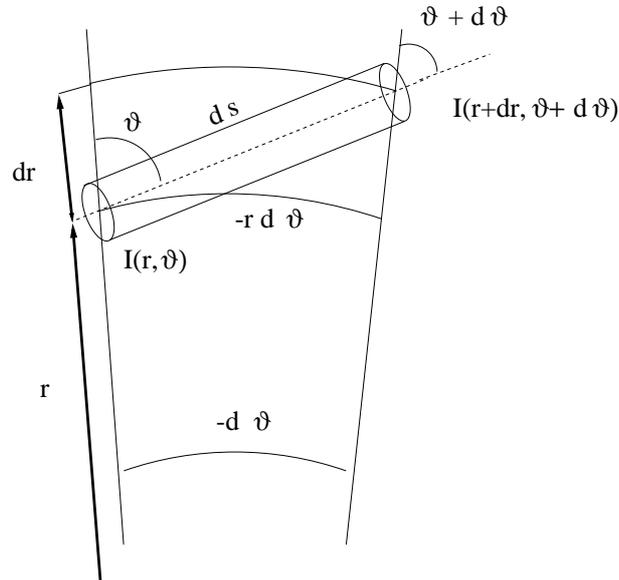


FIG. 2.7 -

QUESTION : Multiplier l'équation 2.32 par $\cos \theta$ et l'intégrer sur $d\Omega$, montrer que l'on obtient

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} + \frac{1}{r}(3P_{\text{rad}} - u) + \frac{\rho\kappa F}{c} = 0 \quad (2.33)$$

2.5 L'équation de transfert dans les intérieurs stellaires

Dans les intérieurs stellaires, localement, l'équilibre thermodynamique est réalisé. Cette hypothèse d'E.T.L. (équilibre thermodynamique local) est correct pour autant que l'on puisse associer une valeur unique de la température à une région. Dans cette région l'on est alors proche de l'équilibre thermique. Quelle est la taille de cette région ? On peut parler d'équilibre thermodynamique local si la taille de cette région est beaucoup plus grande que le libre parcours moyen d'un photon. Dans ce cas le photon durant son temps de vol ne "verra" quasiment aucun changement de la température et l'hypothèse d'équilibre thermique sera localement vérifiée. Que vaut le gradient de température moyen dans une étoile (ordre de grandeur) ?

Le gradient moyen de température dans une étoile est très faible.

$$\frac{dT}{dr} \approx \frac{T_c}{R} \approx \frac{10^7 \text{K}}{7 \cdot 10^{10} \text{cm}} \sim 10^{-4} \frac{\text{K}}{\text{cm}} \quad (2.34)$$

Que vaut le libre parcours moyen d'un photon ? Dans les intérieurs stellaires on a généralement que le libre parcours moyen des photons est très court. Pour $\rho = \langle \rho_{\odot} \rangle = 1.4 \text{ g cm}^{-3}$ et $\kappa = 1 - 10 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$

$$l \approx \frac{1}{\kappa\rho} \sim 0.01 - 1 \text{ cm} \quad (2.35)$$

Sur un libre parcours moyen de photon, il y a donc peu de variation de température. Le rayonnement peut être localement décrit par la loi de Planck, $I_{\nu} = B_{\nu}(T)$ Notons qu'il ne s'agit que d'un équilibre thermodynamique local. S'il était généralisé dans toute l'étoile, il n'y aurait pas de flux à l'intérieur des étoiles. Le flux est dû aux écarts à l'isotropie. Montrons que le degré d'anisotropie dans les intérieurs stellaires est très faible. Développons I en une série de puissance de $\cos \theta$

$$I(\theta) = I_0 + I_1 \cos \theta + I_2 \cos^2 \theta + \dots \quad (2.36)$$

avec I_0 la composante isotrope. Considérons une région interne suffisamment petite pour que les effets de courbure soient négligeables $ds = dr/\cos\theta$,

$$\frac{dI}{ds} = j\rho - \kappa\rho I \implies \frac{dI}{dr} \cos\theta = \rho(j - \kappa I) \quad (2.37)$$

QUESTION : *Montrer par récurrence que*

$$\frac{dI_{n-1}}{dr} = -\kappa\rho I_n, \quad \text{pour } n > 0 \quad (2.38)$$

L'équation ci-dessus implique que

$$\frac{I_{n-1}}{R} \sim \kappa\rho I_n \rightarrow \frac{I_n}{I_{n-1}} \approx \frac{1}{\kappa\rho R} \approx 10^{-10}. \quad (2.39)$$

La série converge très rapidement, avec une précision de 10^{-20} , on peut prendre

$$I = I_0 + I_1 \cos\theta. \quad (2.40)$$

On ne peut se limiter à I_0 sinon il n'y aurait aucun flux.

QUESTION : *A partir de l'expression de I ci-dessus, calculer la densité d'énergie associée au rayonnement, le flux et la pression de rayonnement.*

La pression de rayonnement et la densité d'énergie ne sont fonctions que de I_0 (aux termes en I_2 près). Le flux dépend de I_1 . Dans les intérieurs stellaires, le flux est une quantité très faible par rapport au contenu thermique $F/(uc) \ll 1$. Si nous reprenons l'Éq. (2.33) avec les hypothèses ci-dessus, il reste

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\rho\kappa F}{c} \quad (2.41)$$

Dans l'intérieur l'approximation du corps noir est valable et l'on a $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4$, on peut donc écrire

$$F_{\text{rad}} = \frac{L_r}{4\pi r^2} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr} = -C_{\text{rad}} \frac{dT}{dr} \quad (2.42)$$

avec $C_{\text{rad}} = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}$, la conductivité radiative. Plus l'opacité est grande, plus la conductivité est faible, elle est proportionnelle à T^3 et au libre parcours moyen. Il n'y a pas de flux si le gradient de température est nul. L'équation (2.42) est l'équation de transfert radiatif dans les intérieurs stellaires. Il s'agit d'une équation essentielle pour la structure interne des étoiles.

2.6 L'opacité moyenne

Partons de l'équation de transfert radiatif et supposons l'E.T.L. réalisé

$$\frac{dP_{\text{rad}}(\lambda)}{dr} = -\frac{\kappa_{\lambda}\rho F_{\lambda}}{c} \implies F_{\lambda} = -\frac{4\pi}{3\rho\kappa_{\lambda}} \frac{dB_{\lambda}(T)}{dr} \quad (2.43)$$

Puisque, lorsque l'E.T.L. est réalisé

$$P_{\text{rad}}(\lambda) = \frac{4\pi B_{\lambda}(T)}{3c} \quad (2.44)$$

Cherchons la manière de calculer κ telle que la même équation puisse être écrite entre les grandeurs "bolométriques", i.e.

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\kappa\rho F}{c} \implies F = -\frac{4\pi}{3\rho\kappa} \frac{dB(T)}{dr} \quad (2.45)$$

Partons de l'équation monochromatique et intégrons-la sur les longueurs d'onde

$$F = \int_{\lambda} F_{\lambda} d\lambda = -\frac{4\pi}{3\rho} \int_{\lambda} \frac{1}{\kappa_{\lambda}} \frac{dB_{\lambda}(T)}{dr} d\lambda \quad (2.46)$$

Si nous définissons κ tel que

$$\frac{1}{\kappa} \frac{dB(T)}{dr} = \int_{\lambda} \frac{1}{\kappa_{\lambda}} \frac{dB_{\lambda}(T)}{dr} d\lambda \quad (2.47)$$

alors l'équation impliquant les valeurs intégrées sur les fréquences aura la même forme que l'équation impliquant les grandeurs monochromatiques.

Comme B et B_{λ} sont fonctions de r via T

$$\frac{1}{\kappa} \frac{dB(T)}{dT} \frac{dT}{dr} = \int_{\lambda} \frac{1}{\kappa_{\lambda}} \frac{dB_{\lambda}(T)}{dT} \frac{dT}{dr} d\lambda \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{\kappa} \frac{dB(T)}{dT} = \int_{\lambda} \frac{1}{\kappa_{\lambda}} \frac{dB_{\lambda}(T)}{dT} d\lambda \quad (2.49)$$

L'équation ci-dessus définit l'opacité moyenne de Rosseland utilisée dans les intérieurs stellaires.

Remarque

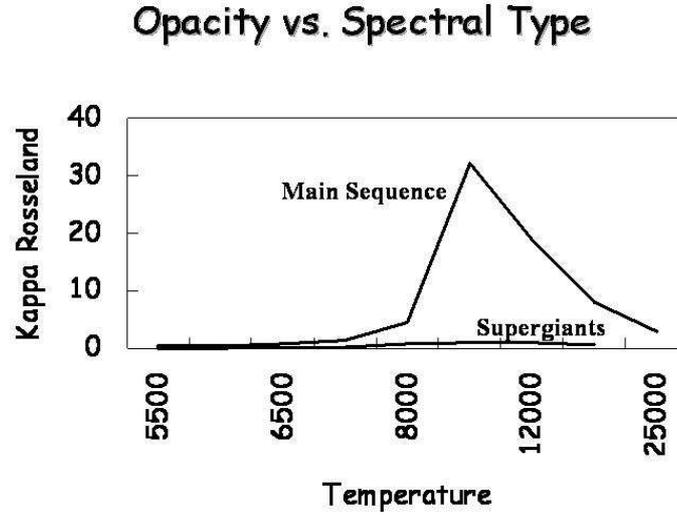


FIG. 2.8 – Opacité moyenne de Rosseland en surface pour différents types spectraux.

Les tables d'opacité donnent en général la moyenne de Rosseland pour l'opacité totale (voir chapitre 3) : (bound+bound)+(bound-free) + (free-free) \times (facteur corrigeant de l'émission induite).

La moyenne de *Rosseland* pour l'absorption *bf* (bound-free) seule est (cf. Schwarzschild, 1958) :

$$\kappa_{bf} \simeq K_0 \rho T^{-3.5} \quad (2.50)$$

avec $K_0 = 4.34 \cdot 10^{25} Z(1 + X) \frac{\bar{g}_{bf}}{t}$ où \bar{g}_{bf} est une moyenne du facteur de *Gaunt* (voisin de 1) et t est le facteur dit de *guillotine*, destiné à corriger la surestimation du nombre d'électrons liés aux basses températures ($t \simeq 10$), X est la fraction de masse de l'hydrogène, Z est la fraction de masse des éléments lourds (cf chapitre 4).

La moyenne de *Rosseland* pour l'absorption *ff* (free-free) seule est (cf. Schwarzschild, 1958)

$$\kappa_{ff} \simeq K_0 \rho T^{-3.5} \quad (2.51)$$

avec ici

$$K_0 = 3.68 \cdot 10^{22} \bar{g}_{ff} (1 + X) (X + Y) \quad (2.52)$$

où Y est la fraction de masse de l'hélium. On note que la dépendance en ρ et T est globalement la même pour les processus ff et bf . Toutefois, le coefficient K_0 est beaucoup plus grand pour le processus bf . Celui-ci dominera dans les étoiles de Population I, tandis que dans les étoiles de Population II, où Z est très faible, l'absorption free-free peut dominer.

2.7 La relation masse–luminosité

L'équation de transfert radiatif permet de trouver la relation entre la masse et la luminosité des étoiles, partons de l'équation

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\kappa\rho F}{c} \quad (2.53)$$

En utilisant $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4$ et $F_r = \frac{L_r}{4\pi r^2}$, et en approximant $\frac{dT^4}{dr} \approx -\frac{T_c^4}{R}$, $L_r \sim L$, $r \sim R/2$, on trouve

$$\frac{1}{3}a\frac{T_c^4}{R} = \frac{\kappa\rho}{c}\frac{L}{\pi R^2} \implies L = \frac{\pi ac}{3}\frac{RT_c^4}{\kappa\rho} \quad (2.54)$$

QUESTION : *Montrer que*

$$T_c \sim \frac{\mu m_H}{k} \frac{GM}{R} \quad (2.55)$$

en utilisant l'équation d'équilibre hydrostatique $\frac{dP}{dr} = -\rho g$, l'équation d'état des gaz parfaits $P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T$ et en prenant pour ρ la densité moyenne $\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$, avec μ le poids moléculaire moyen (voir chapitre 4) et m_H la masse d'un proton.

En utilisant ce dernier résultat, on montre facilement que

$$L = 4ac \left(\frac{Gm_H}{k} \right)^4 \frac{\mu^4 M^3}{\kappa} \quad (2.56)$$

Il s'agit de la relation masse–luminosité cherchée. Remarquons les points suivants :

1. En fait $L \propto M^\alpha$ avec un α moyen égal à 3, α varie selon le domaine de masse considéré.

2. Par unité de masse, une étoile de grande masse émet beaucoup plus d'énergie qu'une étoile de type solaire. Ceci a des conséquences importantes. Le temps de vie des étoiles massives est plus court que celui des étoiles de petites masses. Ce sont les étoiles massives qui sont les principaux agents de la nucléosynthèse stellaire.
3. A masse égale, une étoile d'hélium sera beaucoup plus lumineuse qu'une étoile de composition standard.
4. Plus le milieu est opaque, plus la luminosité est faible.
5. Cette relation est indépendante du mécanisme de production d'énergie

2.8 Atmosphère grise en équilibre radiatif

Nous allons calculer la variation de température en fonction de la profondeur optique τ dans le cadre des hypothèses suivantes :

1. Atmosphère plane parallèle (cf Fig. 2.9). Dans le cas du Soleil, l'atmosphère a une épaisseur de 200 à 400 km, ce qui est très petit en comparaison du rayon solaire. Cette hypothèse est donc applicable.
2. Nous ferons l'hypothèse d'E.T.L., à chaque profondeur il est possible d'associer une seule température $T(z)$ ainsi qu'une fonction source S_ν définie par $S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = B_\nu(T)$.
3. Nous supposons que l'équilibre radiatif est réalisé
4. Nous ferons par ailleurs l'hypothèse que l'opacité ne dépend pas de la fréquence (cas gris). Il s'agit d'une simplification peu justifiée mais qui donne une première approximation. On parle dans ce cas d'atmosphère grise.

L'équation

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\kappa\rho F}{c} \quad (2.57)$$

devient, en posant $dz = -dr$ et en définissant τ la profondeur optique par $d\tau \equiv \kappa\rho dz$,

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{d\tau} = \frac{F}{c} \quad (2.58)$$

Intégrons entre 0 et τ l'équation ci-dessus, en faisant l'hypothèse que F ne dépend pas de τ (nous supposons donc le flux constant dans l'atmosphère,

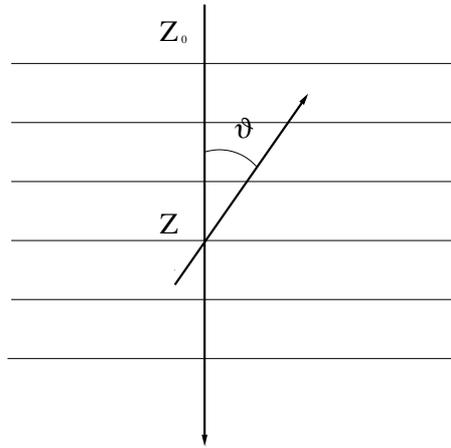


FIG. 2.9 –

ce qui est vrai si la surface ne change pas en fonction du temps et s'il n'y a pas production d'énergie. Ce flux constant peut s'écrire $F = \sigma T_{\text{eff}}^4$ ³),

$$P_{\text{rad}}(\tau) - P_{\text{rad}}(0) = \frac{F}{c} \tau \quad (2.59)$$

$$\frac{1}{3} a T^4(\tau) - \frac{1}{3} a T^4(0) = \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{c} \tau \quad (2.60)$$

d'où l'on tire que

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 [\tau + q] \quad (2.61)$$

en utilisant le fait que $\sigma = \frac{ca}{4}$ et en définissant $q \equiv \frac{4}{3} \frac{T^4(0)}{T_{\text{eff}}^4}$.

QUESTION 31 : *Montrer que q est égal à $c \frac{P_{\text{rad}}(0)}{F}$.*

QUESTION 32 : *Montrer que dans le cas simplifié où l'intensité sortante est constante et l'intensité entrante nulle (approximation d'Eddington) $q = 2/3$.*

³Comment peut-on dire que le flux est constant alors que dans l'intérieur la température varie et donc $F = \sigma T^4$ varie ? En réalité, lorsque l'on écrit $F = \sigma T^4$ on écrit le flux sortant. Pour avoir le flux net, il faut soustraire le flux entrant. C'est le flux net dont on dit qu'il est constant. La température effective est définie par l'égalité $F = \sigma T_{\text{eff}}^4$.

Dans le cas où l'on fait l'approximation d'Eddington, on obtient alors

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_{\text{eff}}^4 \left[\tau + \frac{2}{3} \right] \quad (2.62)$$

Si $\tau = 0$, $T(0) = 0.841T_{\text{eff}}$, si $\tau = 2/3$, $T(2/3) = T_{\text{eff}}$.

2.9 Intensité sortante

Dans le cas d'une atmosphère plane-parallèle (cf Fig. 2.9), l'équation de transfert s'écrit

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu \rho - \kappa_\nu \rho I_\nu \implies -\cos \theta \frac{dI_\nu}{dz} = j_\nu \rho - \kappa_\nu \rho I_\nu \quad (2.63)$$

puisque $ds = -dz/\cos \theta$. Posons $\mu = \cos \theta$ et $d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho dz$, on obtient alors

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} + I_\nu = I_\nu - S_\nu \quad (2.64)$$

La solution de l'équation réduite

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu \quad (2.65)$$

est $I_\nu = Ce^{\tau_\nu/\mu}$.

QUESTION : *Montrer que*

$$C(\tau_\nu) = - \int_{\tau_{1\nu}}^{\tau_\nu} S_\nu e^{-t'/\mu} \frac{dt'}{\mu} + I_\nu(\tau_{1\nu}) e^{-\tau_{1\nu}/\mu}. \quad (2.66)$$

Donc l'intensité $I_\nu(\tau_\nu, \mu)$ s'écrit

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \left[- \int_{\tau_{1\nu}}^{\tau_\nu} S_\nu e^{-t'/\mu} \frac{dt'}{\mu} + I_\nu(\tau_{1\nu}) e^{-\tau_{1\nu}/\mu} \right] \exp \tau_\nu/\mu. \quad (2.67)$$

De cette équation⁴, on tire que, en posant $\mu = 1$

$$I_\nu(\tau_\nu, 1) = - \int_{\tau_{1\nu}}^{\tau_\nu} S_\nu e^{\tau_\nu - t'} dt' + I_\nu(\tau_{1\nu}) e^{\tau_\nu - \tau_{1\nu}}. \quad (2.68)$$

⁴Si le milieu n'est ni émetteur, ni absorbant $j = 0$, $\kappa = 0$, alors $I = \text{constante}$. On retrouve bien dans ce cas le fait que I reste constant.

Supposons un milieu homogène avec une fonction source et une opacité constante, omettons l'indice ν . Voyons ce que devient l'intensité émergente (en $\tau = 0$)

$$I(0) = I(\tau_{1\nu})e^{-\tau_{1\nu}} + S(1 - e^{-\tau_{1\nu}}),$$

Si le milieu est optiquement mince alors $\tau_{1\nu} \ll 1$ et $e^{\tau_{1\nu}} \approx 1 + \tau_{1\nu}$.

$$I(0) \approx I(\tau_{1\nu})(1 - \tau_{1\nu}) + S(1 - 1 + \tau_{1\nu}) = (S - I(\tau_{1\nu}))\tau_{1\nu} + I(\tau_{1\nu}),$$

le rayonnement sortant est plus grand ou plus petit que $I(\tau_{1\nu})$ selon que S est plus grand ou plus petit que $I(\tau_{1\nu})$. Si $I(\tau_{1\nu}) = 0$, on a $I(0) = S\tau_{1\nu}$ ⁵.

Dans le cas optiquement épais $\tau_{1\nu} \gg 1$, on a que $e^{-\tau_{1\nu}} \approx 0$ et $I(0) = S$, l'intensité émergente est égale à la fonction source (c'est d'ailleurs pour cela qu'on l'appelle la fonction source).

QUESTION : Dessiner l'allure générale de $I(0)$ en fonction de τ .

Repartons de l'Eq. (2.67). A un niveau τ_ν , l'intensité est pour $\tau_{1\nu} \gg 1$ (limite inférieure d'intégration très grande)

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) e^{-\frac{\tau_\nu - t'}{\mu}} \frac{dt'}{\mu} \quad (2.69)$$

Au bord extérieur, on a donc

$$I_\nu(0, \mu) = \int_0^{\infty} S_\nu(t') e^{-\frac{t'}{\mu}} \frac{dt'}{\mu} \quad (2.70)$$

L'intensité émergente est égale à la somme des contributions des fonctions sources des niveaux inférieurs réduites par un facteur d'absorption. Pour calculer l'intensité émergente, il faut connaître $S_\nu(\tau_\nu)$ et donc la façon dont la température, la pression, la composition chimique varient avec τ_ν .

Dans le cas d'une raie d'absorption (cf chapitre 3), le rayonnement du continu provient de couches ayant une profondeur optique plus grande que le rayonnement provenant du centre de la raie, comme le montre la Fig. 2.13.

⁵La profondeur optique n'est rien d'autre que le nombre de libres parcours moyens du photon le long de l'épaisseur du milieu d'où provient le rayonnement. Le rayonnement d'une étoile provient d'une région épaisse d'environ un libre parcours moyen, c'est-à-dire d'une profondeur optique égal à 1.

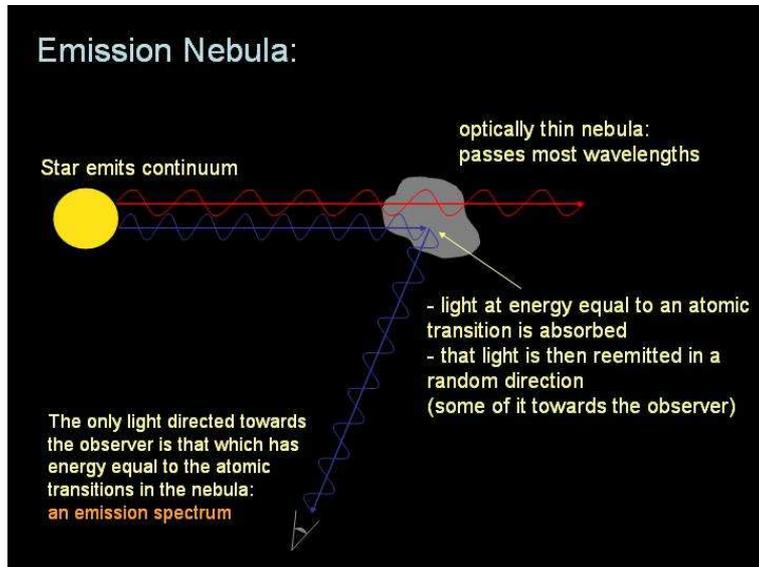


FIG. 2.10 – *Principe de formation d'un spectre en émission.*

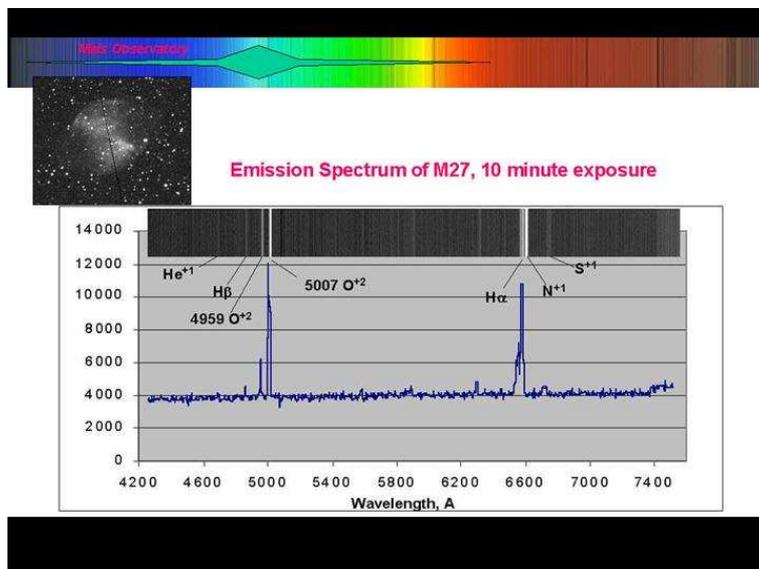


FIG. 2.11 – *Exemple de spectre en émission.*

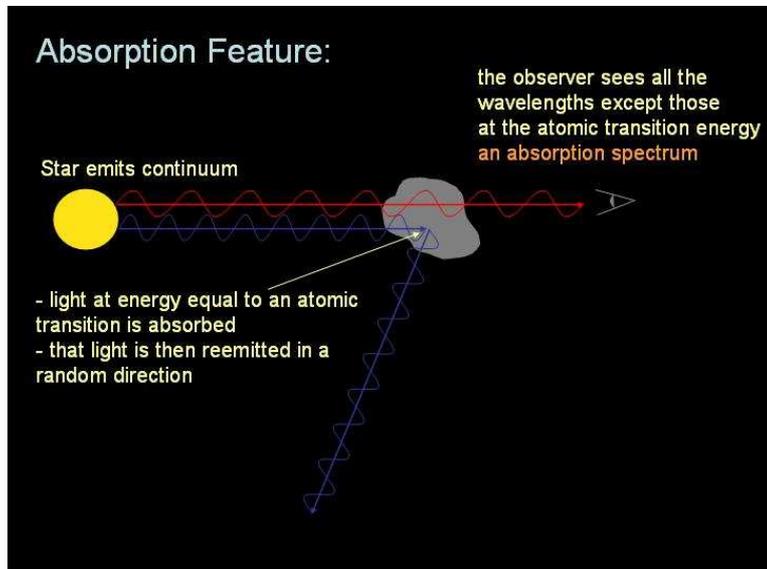


FIG. 2.12 – Principe de formation d'un spectre en absorption.

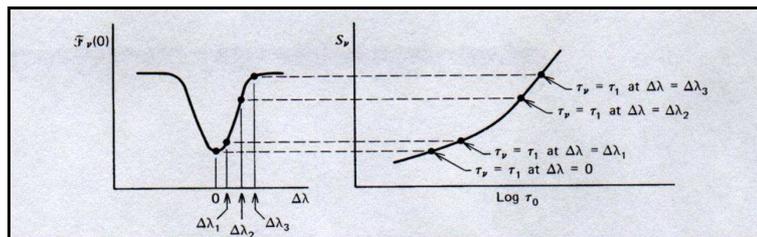


FIG. 2.13 – Variation de la fonction source et de la profondeur optique à différentes longueurs d'ondes le long du profil d'une raie en absorption.

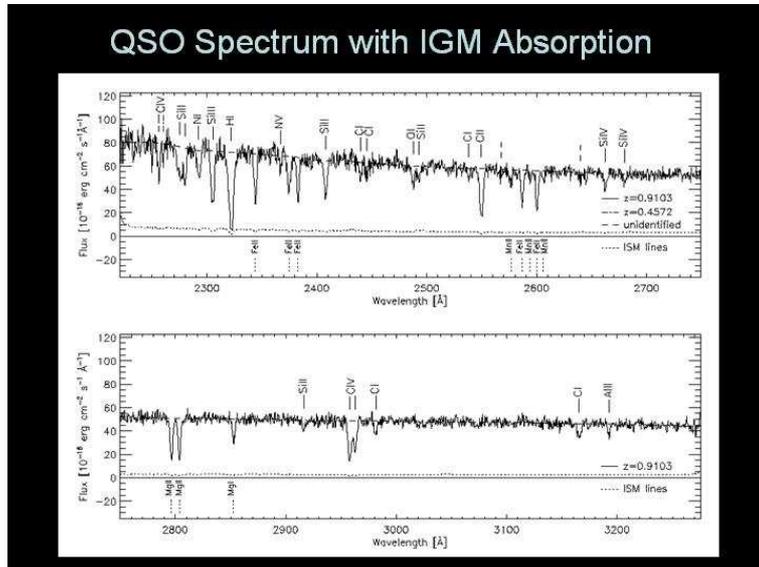


FIG. 2.14 – *Lumière d'un Quasi Stellar Object (QSO) absorbé par un nuage de matière sur la ligne de visée.*

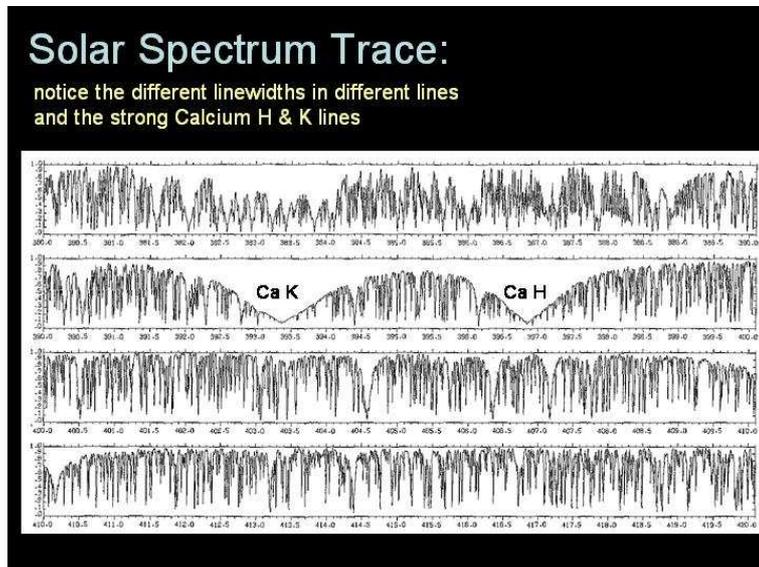


FIG. 2.15 – *Spectre du Soleil.*

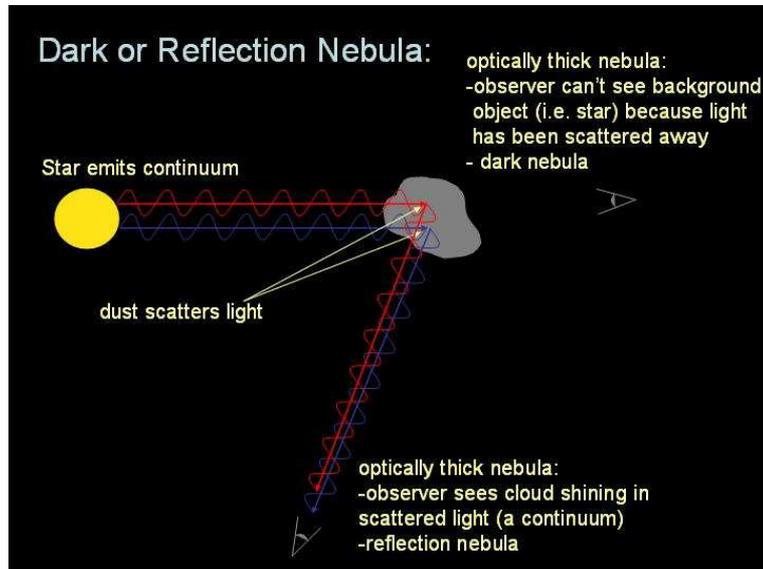


FIG. 2.16 – Nébuleuse sombre et lumière réfléchie.

2.10 L'assombrissement centre–bord

Le flux du Soleil est évidemment le même en chaque point (cela ne serait pas le cas si le Soleil tournait très rapidement sur lui-même). Cependant pour un observateur distant, l'angle θ varie sur la surface du disque (cf. Fig. 2.17) Au centre du disque $\mu = 1$, au bord $\mu = 0$. Calculons $I_\nu(0, \mu)$ dans le cas gris et sous l'hypothèse d'E.T.L., i.e. $S = j/\kappa = B(T) = \sigma T^4/\pi$. Par ailleurs nous avons vu que $T^4 = \frac{3}{4}T_{\text{eff}}^4(\tau + \frac{2}{3})$. Donc $S = \frac{3F}{4\pi}(\tau + \frac{2}{3})$.

$$I(0, \mu) = \frac{3F}{4\pi} \int_0^\infty (t' + \frac{2}{3}) e^{-t'/\mu} \frac{dt'}{\mu} \quad (2.71)$$

QUESTION : Montrer que $I(0, \mu) = \frac{3F}{4\pi}(\mu + \frac{2}{3})$.

On obtient donc que

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = 0.6\mu + 0.4 \quad (2.72)$$

Il s'agit de la loi d'assombrissement centre–bord. Elle est assez bien vérifiée pour le Soleil dans le visible. Ceci est dû au fait que la principale source

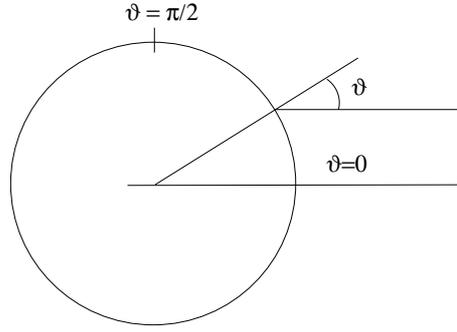


FIG. 2.17 –

d'opacité est due aux ions négatifs de l'hydrogène dont l'opacité varie peu avec la fréquence (voir ci-dessous). L'assombrissement centre-bord devient en général plus fort lorsque la fréquence augmente. L'observation de $I(0, \mu)$ peut nous renseigner sur la relation $T(\tau_\nu)$. La résolution de l'équation intégrale de $I(0, \mu)$ fournit ce qu'on appelle le modèle d'atmosphère solaire empirique .

2.11 Le modèle d'atmosphère solaire empirique (en lecture)

Dans le cas du Soleil, il est possible de déterminer la variation de la température en fonction de la profondeur optique de manière empirique, en utilisant l'approximation d'Eddington-Barbier. Développons la fonction source $S(\tau_\lambda)$ autour du point τ_λ^*

$$S(\tau_\lambda) = S(\tau_\lambda^*) + (\tau_\lambda - \tau_\lambda^*) \frac{dS}{d\tau_\lambda} \Big|_{\tau_\lambda^*} + 1/2(\tau_\lambda - \tau_\lambda^*)^2 \frac{d^2S}{d\tau_\lambda^2} \Big|_{\tau_\lambda^*} + \dots$$

Portons cette expression dans $I_\lambda(0, \cos \theta) = \int_0^\infty S_\lambda(t, \cos \theta) e^{-t/\cos \theta} dt / \cos \theta$. On obtient l'expression suivante pour l'intensité

$$I_\lambda(0, \theta) = S_\lambda(\tau_\lambda^*) + (\cos \theta - \tau_\lambda^*) \frac{dS}{d\tau_\lambda} \Big|_{\tau_\lambda^*} + 1/2(\cos^2 \theta + (\cos \theta - \tau_\lambda^*)) \frac{d^2S}{d\tau_\lambda^2} \Big|_{\tau_\lambda^*} + \dots$$

Si l'on choisit $\tau_\lambda^* = \cos \theta$, le deuxième terme s'annule et le troisième terme se trouve minimisé, si bien qu'en assez bonne approximation :

$$I_\lambda(0, \theta) \simeq S_\lambda(\tau_\lambda = \cos \theta)$$

Cette expression nous dit que la mesure de $I_\lambda(0, \theta)$ nous permet de connaître S_λ à différentes profondeurs optiques. Or le Soleil est la seule étoile pour laquelle on possède des observations très précises

- a) de l'intensité continue absolue au centre du disque en fonction de λ dans un très grand domaine de longueurs d'onde.
- b) de la variation du centre au bord du disque de cette même intensité continue en fonction de la longueur d'onde.

La relation approchée ci-dessus signifie qu'au centre du disque ($\theta = 0$) nous recevons de l'information de couches profondes, $I_{\text{centre}} = S_\lambda(\tau_\lambda = 1)$, alors que le bord ($\theta = 90^\circ$), nous renseigne sur des couches beaucoup plus élevées, $I_{\text{bord}} = S_\lambda(\tau_\lambda = 0)$.

Dans le cas où l'équilibre thermodynamique local (ETL) est réalisé (ce qui en général est le cas dans la photosphère solaire), la fonction source est la fonction de Planck,

$$S(\tau_\lambda) = B(\tau_\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

où T est la température à la profondeur optique τ_λ . L'assombrissement observé du centre au bord du Soleil nous renseigne donc sur la diminution de température depuis les couches profondes jusqu'aux couches les plus élevées.

2.12 L'opacité due à l'ion H^-

L'ion H^- est très fragile ($I_{\text{ion}} = 0.754$ eV) et ne possède qu'un seul état stable. Dans une atmosphère semblable à celle du Soleil, l'hydrogène n'est pratiquement pas ionisé et les électrons libres qui permettent de former l'ion H^- proviennent en majeure partie de l'ionisation des "métaux" (Mg, Si, Fe).

Même si le rapport $N(H^-)/N(H^0)$, calculé par la loi de Saha, est très faible dans le Soleil, $\sim 10^{-8}$ à une température de 5000 K, la contribution de H^- à l'opacité continue dans le visible dépasse de beaucoup la contribution de l'hydrogène.

La section efficace des transitions b-f de l'ion H^- passe par un maximum aux environs de 8000 Å, et diminue de part et d'autre de cette longueur d'onde pour atteindre une valeur nulle à 16450 Å⁶. Au delà de 16450 Å, les

⁶C'est à 16450 Å, que l'opacité est la plus faible. C'est à cette longueur d'onde que

transitions f-f prennent le relais (leur section efficace est proportionnelle à λ^2).

L'hydrogène et l'ion H^- sont les principales sources d'opacité continue dans le visible. Dans d'autres domaines de longueurs d'onde, d'autres sources d'opacité peuvent être dominantes. Par exemple pour $\lambda \leq 2600 \text{ \AA}$, l'opacité est essentiellement due aux métaux, C, Si, Mg, Fe, Ni, Al, Ca ...

2.13 Note sur la fonction source

Pour pouvoir calculer le spectre émergent, il faut connaître la fonction source, *i.e.* le rapport entre le coefficient d'émission et le coefficient d'absorption de la matière. A l'équilibre thermodynamique local (en général valable dans l'atmosphère solaire), elle est donnée par la loi de Planck. (L'hypothèse d'ETL est généralement satisfaite lorsque le nombre de transitions induites par les collisions est beaucoup plus grand que le nombre de transitions induites par le rayonnement). Si l'ETL n'est pas applicable, c'est-à-dire si les collisions ne sont pas suffisamment nombreuses et efficaces, la fonction source s'écrit de façon formelle,

$$S_\lambda = \frac{N_u A_{ul}}{N_l B_{lu} - N_u B_{ul}}$$

où les A_{ul} , B_{lu} et B_{ul} sont les coefficients d'Einstein, N_u , N_l sont les nombres d'électrons dans les niveaux supérieurs, respectivement inférieurs. Ce rapport représente exactement le rapport de ce qui est émis à ce qui est absorbé (le terme $N_u B_{ul}$ représente les émissions stimulées par la radiation);

Notons que l'émission stimulée intervient au dénominateur de la fonction source bien qu'il s'agisse d'une émission. En effet si l'on se reporte à l'équation de transfert

$$\frac{dI_\lambda}{ds} = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda + j_\lambda \rho$$

le premier terme à droite du signe égal, qui est le dénominateur de la fonction source, décrit toutes les interactions entre la matière et le rayonnement que ces interactions aient pour résultat d'émettre ou d'absorber du rayonnement. Le second terme décrit l'émissivité de la matière indépendamment du rayonnement.

l'on voit le plus profondément dans le Soleil. Dans l'UV et l'IR, on observe des couches beaucoup plus élevées de l'atmosphère solaire, d'autant plus élevée que λ est petit dans l'UV et grand dans l'IR.

En non-ETL, les populations des niveaux doivent être calculés en tenant compte de tous les processus détaillés tant collisionnels que radiatifs; l'intensité de la radiation à une longueur d'onde λ , que l'on désire calculer, intervient donc directement dans les processus d'excitation et de désexcitation des niveaux.

Dans la photosphère solaire, on peut montrer empiriquement que, dans la plupart des cas, l'hypothèse de l'ETL donne de très bons résultats. Pour ce faire on compare les résultats d'abondance obtenus à partir de raies de différents potentiels d'excitation d'un élément donné, tant neutre qu'ionisé.

2.14 Transfert d'énergie convective

Nous avons vu que le flux radiatif est proportionnel au gradient de température. On peut se poser la question si le gradient de température peut être aussi grand que l'on veut. En fait, le gradient a une valeur limite supérieure, comme cela a été démontré par Karl Schwarzschild en 1906 (K. Schwarzschild 1906, Goettingen Nachr, 41).

Considérons une cellule de matière en équilibre au niveau r_0 , une cellule assez petite pour être décrite par une seule valeur de la pression, de la température et de la densité et suffisamment grande pour qu'une description macroscopique soit valable (cf Fig. 2.18). Considérons une petite perturba-

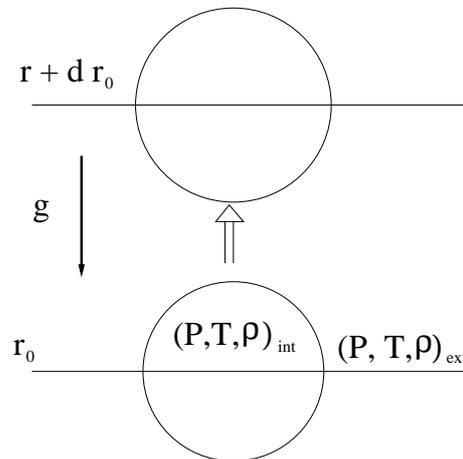


FIG. 2.18 –

tion au voisinage du niveau d'équilibre r_0 . En absence de rotation et d'effets de viscosité importants

$$\rho_{\text{int}} \frac{d^2 r}{dt^2} + g(\rho_{\text{int}} - \rho_{\text{ext}}) = 0 \quad (2.73)$$

$$\rho_{\text{int}}(r) \approx \rho_{\text{int}}(r_0) + \frac{d\rho_{\text{int}}}{dr}(r - r_0) \quad (2.74)$$

$$\rho_{\text{ext}}(r) \approx \rho_{\text{ext}}(r_0) + \frac{d\rho_{\text{ext}}}{dr}(r - r_0) \quad (2.75)$$

Si $\rho_{\text{int}}(r_0) = \rho_{\text{ext}}(r_0)$

$$\rho_{\text{int}} \frac{d^2 r}{dt^2} + g \left(\frac{d\rho_{\text{int}}}{dr} - \frac{d\rho_{\text{ext}}}{dr} \right) (r - r_0) \approx 0. \quad (2.76)$$

Il s'agit d'une équation dont la solution est un mouvement harmonique (sans frottement)

$$r - r_0 = Ae^{iNt} \quad \text{avec} \quad N^2 = \frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho_{\text{int}}}{dr} - \frac{d\rho_{\text{ext}}}{dr} \right) \quad (2.77)$$

le carré de la fréquence de Brunt–Väisälä. Si

$$\frac{d\rho_{\text{int}}}{dr} > \frac{d\rho_{\text{ext}}}{dr} \quad (2.78)$$

le milieu est stable vis-à-vis de la convection, N est réel, le mouvement oscillatoire est non-amplifié. Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante pour que le milieu soit stable. En effet si

$$\frac{d\rho_{\text{int}}}{dr} < \frac{d\rho_{\text{ext}}}{dr} \quad (2.79)$$

alors $N = -i\sqrt{\frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho_{\text{ext}}}{dr} - \frac{d\rho_{\text{int}}}{dr} \right)}$, le signe moins indiquant un mouvement vers l'extérieur. Dans ce cas la cellule s'écarte de plus en plus de sa position d'équilibre, le milieu est instable vis-à-vis de la convection. La cellule moins dense que le milieu environnant poursuit son déplacement.

Lorsque le milieu est convectivement instable, comment la convection transporte-t-elle l'énergie ? La cellule qui monte est plus chaude que le milieu environnant. Comme la cellule est plus chaude, au moment où la cellule se dissout dans le milieu environnant, de la chaleur est transférée au milieu. A l'inverse lorsqu'une cellule descend dans l'étoile, elle aura pour effet de refroidir le milieu environnant, le bilan net est donc un flux d'énergie de l'intérieur vers l'extérieur.

2.14.1 Note sur les transformations adiabatiques

Dans le cas d'une transformation adiabatique affectant un gaz parfait on montre que

$$pV^\gamma = \text{constante.} \quad (2.80)$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante.} \quad (2.81)$$

$$\frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{constante.} \quad (2.82)$$

avec $\gamma = C_p/C_V$.

DEMONSTRATION

Soit un système thermodynamique qui peut être décrit à l'équilibre par trois coordonnées p, V, T liées par une équation d'état $f(p, V, T) = 0$.

Soit une mole de matière subissant une transformation infinitésimale au cours de laquelle la quantité de chaleur δQ est échangée avec l'extérieur alors même que les coordonnées thermodynamiques varient de dp, dV, dT , δQ peut alors être exprimée de trois façons différentes, suivant le choix du couple de coordonnées indépendantes :

$$\delta Q = C_v dT + l dV \quad (2.83)$$

$$\delta Q = C_p dT + h dp \quad (2.84)$$

$$\delta Q = \lambda dp + \mu dV \quad (2.85)$$

C_v et C_p sont appelés les chaleurs spécifiques molaires, respectivement à volume constant et à pression constante.

QUESTION : *En partant de*

$$dp = \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T dV + \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V dT \quad (2.86)$$

$$dV = \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T dp + \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p dT \quad (2.87)$$

$$dT = \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_V dp + \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_p dV \quad (2.88)$$

montrer que

$$\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T = - \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_p \quad (2.89)$$

et que

$$\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{V=1} = 1 \quad (2.90)$$

QUESTION : *Montrer que*

$$h = -(C_p - C_v) \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v \quad (2.91)$$

$$l = (C_p - C_v) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \quad (2.92)$$

$$\lambda = C_v \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v \quad (2.93)$$

$$\mu = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \quad (2.94)$$

Dans le cas d'un gaz parfait ($pV = RT$, avec $R = N_0k$, N_0 étant le nombre d'Avogadro), on a

$$h = -(C_p - C_v) \frac{V}{R} \quad (2.95)$$

$$l = (C_p - C_v) \frac{p}{R} \quad (2.96)$$

$$\lambda = C_v \frac{V}{R} \quad (2.97)$$

$$\mu = C_p \frac{p}{R} \quad (2.98)$$

Dans le cas d'une transformation adiabatique infinitésimale

$$C_v dT + l dV = 0 \quad (2.99)$$

$$C_p dT + h dp = 0 \quad (2.100)$$

$$\lambda dp + \mu dV = 0 \quad (2.101)$$

Les deux premières équations conduisent à

$$\frac{dp}{dV} = \frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{l}{h} \quad (2.102)$$

Pour un gaz parfait $l/h = -p/V$, en posant $\gamma = C_p/C_V$, on obtient

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}. \quad (2.103)$$

Si de plus la transformation adiabatique est réversible, les coordonnées thermodynamiques restent toujours définies et on peut intégrer l'équation différentielle ci-dessus. La solution peut se mettre sous la forme

$$pV^\gamma = \text{constante}. \quad (2.104)$$

En tenant compte de l'équation d'état du gaz parfait, on peut écrire

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}. \quad (2.105)$$

$$\frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{constante}. \quad (2.106)$$

2.14.2 La convection adiabatique

Si en montant la cellule ne perd pas de chaleur (vrai dans les intérieurs stellaires, en-dessous de la zone d'ionisation de l'hélium) alors la relation d'adiabaticité s'applique

$$P_{\text{int}} = C\rho_{\text{int}}^\gamma \quad (2.107)$$

Si la vitesse de convection est inférieure à la vitesse du son, l'équilibre de pression est réalisé à chaque instant, donc $P_{\text{int}} = P_{\text{ext}}$. Exprimons la condition de stabilité

$$\frac{d\rho_{\text{int}}}{dr} > \frac{d\rho_{\text{ext}}}{dr} \implies \frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} > \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \quad (2.108)$$

On peut omettre l'indice, car au voisinage de r_0 , $\rho_{\text{int}} \approx \rho_{\text{ext}}$. Cette condition s'applique aux gaz, aux liquides, aux atmosphères planétaires ou stellaires. Considérons le cas du gaz parfait, on a

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \quad (2.109)$$

La condition de stabilité peut alors s'écrire

$$\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} > \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}, \quad (2.110)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dT} \frac{dT}{dr} > \frac{1}{P} \frac{dP}{dT} \frac{dT}{dr} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}. \quad (2.111)$$

Le gradient $\frac{dT}{dr}$ est en général négatif dans une étoile. En divisant de part et d'autre par $\frac{dT}{dr}$ on change le sens de l'inégalité. La condition de stabilité devient

$$\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dT} < \frac{1}{P} \frac{dP}{dT} - \frac{1}{T}. \quad (2.112)$$

ou

$$\frac{d \ln T}{d \ln P} < \frac{\gamma - 1}{\gamma} \equiv \nabla_{\text{ad}} \quad (2.113)$$

Lorsque le gradient de température est faible (en valeur absolue), il n'y a pas de convection. Cette condition de stabilité s'applique également dans le cas d'un mélange gaz parfait et rayonnement.

Les transferts radiatif et convectif sont les principaux modes de transfert de l'énergie dans les étoiles. On voit en regardant la figure 2.19 que le gradient de température change de la zone radiative à la zone convective. La région du coeur est radiative, elle désigne la région où de l'énergie est produite par les réactions nucléaires. La figure 2.20 est une coupe de l'intérieur du Soleil.

2.15 Transfert par conduction électronique

Dans un gaz non dégénéré, les ions de masse Am_H et les électrons de masse m_e ont des vitesses quadratiques moyennes ($\bar{v} \equiv \sqrt{\overline{v^2}}$),

$$\bar{v}_i = \left(\frac{3kT}{Am_H} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{v}_e = \left(\frac{3kT}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.114)$$

Les électrons sont plus rapides que les ions dans un rapport $(Am_H/m_e)^{1/2} = 43\sqrt{A}$. Si le gaz d'électrons est dégénéré, le rapport est même encore plus grand, car les électrons remplissent alors des états d'énergie élevée, alors que les ions gardent la même vitesse thermique. Il est donc physiquement correct de concevoir le gaz d'électrons comme étant composé de particules rapides par rapport à gaz d'ions positifs composé de particules presque à l'arrêt

En présence d'un gradient de température, les électrons vont en moyenne plus vite des hautes vers les basses températures qu'en sens inverse. Les ions vont aussi plus vite des hautes vers les basses températures mais dans un rapport moins grand. La neutralité électrique prévient le développement

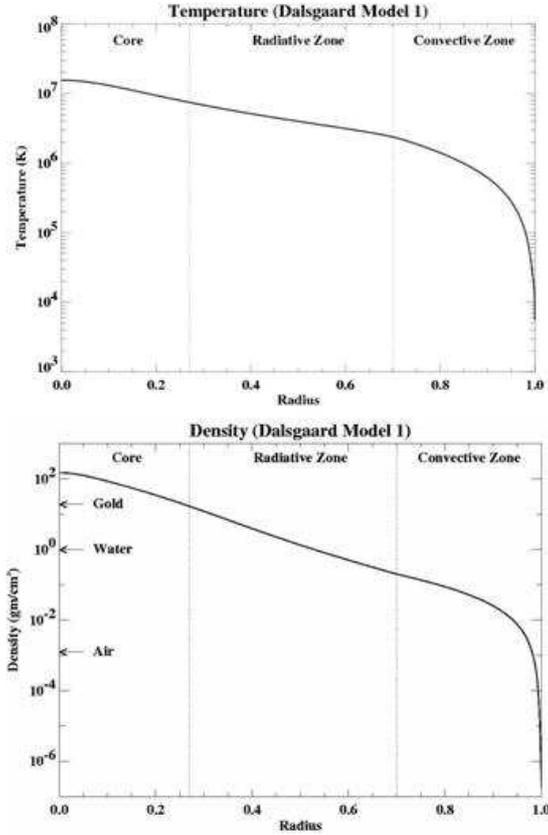


FIG. 2.19 – Variation en fonction du rayon de la température (en haut) et de la densité (en bas) à l'intérieur du Soleil.

d'un flux net de charge, cela n'empêche cependant pas un flux net d'énergie. En effet si le nombre de particules traversant une surface de la gauche vers la droite, n_+ , est le même que le nombre de particules la traversant de la droite vers la gauche, n_- , cela ne signifie pas nécessairement que le flux d'énergie soit nul. En effet l'énergie moyenne des particules d'un côté de la surface peut être différente de l'énergie moyenne des particules de l'autre côté de la surface. On a alors $n_+ E_+ \neq n_- E_-$.

Dans le cas du flux radiatif on avait

$$F_{\text{rad}} = -C_{\text{rad}} \frac{dT}{dr} \text{ avec } C_{\text{rad}} = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \quad (2.115)$$

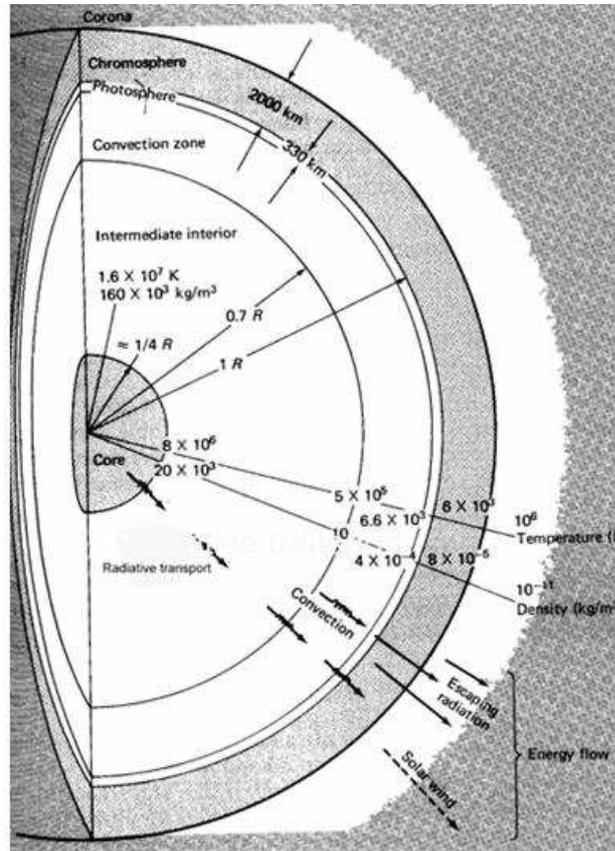


FIG. 2.20 – Structure interne du Soleil.

de même, on peut écrire

$$F_{\text{cond}} = -C_{\text{cond}} \frac{dT}{dr} \text{ avec } C_{\text{cond}} = \frac{4acT^3}{3\kappa_{\text{cond}}\rho} \quad (2.116)$$

En présence des deux modes de transfert

$$F_{\text{tot}} = F_{\text{rad}} + F_{\text{cond}} \equiv \frac{4acT^3}{3\kappa_{\text{tot}}\rho} \frac{dT}{dr} \quad (2.117)$$

d'où

$$\frac{1}{\kappa_{\text{tot}}} = \frac{1}{\kappa_{\text{rad}}} + \frac{1}{\kappa_{\text{cond}}} \quad (2.118)$$

Estimons le flux conductif

$$F_{\text{cond}} \approx -n_e \bar{v} l \frac{dE}{dr}, \quad (2.119)$$

avec n_e le nombre d'électrons par cm^3 , \bar{v} la vitesse quadratique moyenne, l le libre parcours moyen et E l'énergie cinétique moyenne par électron. Dans le cas non dégénéré, on a $E = \frac{1}{2} m_e \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$, d'où

$$F_{\text{cond}} \approx -n_e \bar{v} l \frac{3}{2} k \frac{dT}{dr}, \quad (2.120)$$

d'où

$$C_{\text{cond}} \approx \frac{3}{2} k n_e \bar{v} l. \quad (2.121)$$

Si n_i est le nombre d'ions par cm^3 et σ la section efficace pour les collisions ions–électrons $l = \frac{1}{n_i \sigma}$. Pour estimer σ , on suppose qu'une collision a lieu lorsqu'un électron s'approche suffisamment d'un ion pour que son énergie potentielle dans le champ électrique de l'ion soit égale à son énergie cinétique,

$$\frac{1}{2} m_e \bar{v}^2 = \frac{Z e^2}{r_0} \quad (2.122)$$

donc $r_0 = \frac{2Z e^2}{m_e \bar{v}^2} = \frac{2Z e^2}{3kT}$ et

$$\sigma = \pi r_0^2 = \frac{4\pi Z^2 e^4}{9(kT)^2} \quad (2.123)$$

avec $n_i = \frac{\rho}{A m_H}$, A étant la masse atomique moyenne, $n_e = \frac{1}{2} \frac{\rho}{m_H} (1 + X)$, X étant l'abondance d'hydrogène exprimée en fraction de masse. On a alors

$$C_{\text{cond}} \approx \frac{3}{2} k \frac{1}{2} \frac{\rho}{m_H} (1 + X) \left(\frac{3kT}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{\frac{\rho}{A m_H} \frac{4\pi Z^2 e^4}{9(kT)^2}}. \quad (2.124)$$

$$= \frac{27\sqrt{3}}{16\pi} \frac{k^{7/2}}{m_e^{1/2} e^4} \frac{1 + X}{Z^2/A} T^{5/2} \quad (2.125)$$

d'où

$$\kappa_{\text{cond}} = \frac{4acT^3}{3C_{\text{cond}}\rho} \approx 5000 \frac{Z^2/A}{(1 + X) \frac{\rho}{10}} T_7^{1/2} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \right] \quad (2.126)$$

avec $T_7 = T/10^7$. Malgré la simplicité de cette dérivation, l'expression obtenue est correcte à un facteur deux près. La quantité C_{cond} augmente avec la température et diminue avec Z (plus Z est élevé plus le libre parcours moyen est petit). Pour les étoiles de séquence principale, $l_{\text{photons}} \gg l_{e^-}$ et le transfert conductif est négligeable face au transfert radiatif.

Dans le cas dégénéré, \bar{v} est beaucoup plus grand car $p = p_{\text{Fermi}}$ (cf chapitre 5), l est aussi beaucoup plus grand, car l'électron a de la peine à trouver un état final. A $T_7 = 1$ et $\rho \geq 10^7$ kg/dm³, on a que $C_{\text{cond}} > C_{\text{rad}}$. Des développements similaires conduiraient à

$$\kappa_{\text{cond}} = 5.12 \cdot 10^{-3} \frac{\sum Z_i X_i \theta_i / A_i}{(1 + X)^2} \frac{T_7^2}{\rho / 10^5} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \right] \quad (2.127)$$

avec $\theta \approx 0.85/Z_i^{1/3}$ et X_i l'abondance de l'élément i exprimé en fraction de masse. Sauf dans des états très denses (caractéristiques des phases avancées), on peut se limiter aux transferts radiatif et convectif.

Chapitre 3

Absorption et émission du rayonnement

Dans ce chapitre nous allons étudier la forme du coefficient d'extinction intervenant dans l'équation de transfert radiatif. Connaissant comment un élément peut absorber le rayonnement, il est possible, en mesurant la quantité d'énergie absorbée, de remonter à l'abondance de cet élément dans les régions d'où le rayonnement provient. Nous terminerons donc ce chapitre par quelques considérations simples sur le lien qui existe entre énergie absorbée et quantité de l'élément absorbant ainsi que sur un bref aperçu des abondances cosmiques.

3.1 Les ondes électromagnétiques

Une onde électrique plane, de fréquence ν et d'amplitude \mathbf{E}_ν^0 se propageant le long de l'axe x s'écrit

$$\mathbf{E}_\nu = \mathbf{E}_\nu^0 e^{i(\omega t - kx)} = \mathbf{E}_\nu^0 e^{i2\pi\nu(t - \frac{x}{v})}, \quad (3.1)$$

$k = \hat{n}\omega/c$ avec $\hat{n}^2 = \epsilon_r \mu_r$ où μ_r est la perméabilité magnétique relative. Nous n'allons considérer par la suite que des milieux pour lesquels la perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1$.

Si \hat{n} est réel, l'onde ne change pas d'intensité, $I_\nu \sim |\mathbf{E}_\nu|^2$, c'est le cas d'un milieu diélectrique. Si le milieu non seulement réfracte l'onde, mais aussi l'absorbe (milieu conducteur), \hat{n} est complexe et nous l'écrivons

$$\hat{n} = n - in', \quad (3.2)$$

L'onde est amortie

$$\mathbf{E}_\nu = \mathbf{E}_\nu^0 e^{-2\pi\nu \frac{n'x}{c}} e^{2\pi i\nu(t - \frac{nx}{c})}. \quad (3.3)$$

La vitesse de phase est c/n (n : partie réelle). L'amplitude est décroissante et l'intensité de l'onde varie comme

$$I_\nu = I_\nu^0 e^{-4\pi\nu \frac{n'x}{c}}. \quad (3.4)$$

En comparant les équations (2.2) et (3.4), on trouve que

$$\kappa_\nu \rho = \frac{4\pi\nu n'}{c}. \quad (3.5)$$

On définit souvent $\kappa'_\nu \equiv \kappa_\nu \rho$, on a donc

$$\kappa'_\nu = \frac{4\pi\nu n'}{c} = \frac{2\omega n'}{c}, \quad (3.6)$$

avec $\omega = 2\pi\nu$.

3.2 Absorption par un oscillateur harmonique

Le modèle le plus simple décrivant l'interaction du rayonnement et des atomes est celui de l'oscillateur harmonique. L'atome est considéré comme un dipôle oscillant sous l'effet d'un champ de rayonnement. Les théories quantiques ont étendu cette description qu'il nous faut rappeler ici.

Considérons l'atome comme formé d'un électron e lié à un centre de force (noyau). Sous l'effet du champ \mathbf{E}_ν , l'électron oscille retenu par une force de rappel $m_e kx$. L'équation du mouvement du dipôle oscillant est

$$m_e \ddot{x} = \underbrace{-m_e \gamma \dot{x}}_{\text{force de freinage}} - \underbrace{m_e kx}_{\text{force de rappel}} + \underbrace{eE_\omega^0 e^{i\omega t}}_{\text{force exterieure}} \quad (3.7)$$

La fréquence propre (sans freinage, ni force extérieure) est

$$\omega_0^2 = k \quad \text{avec} \quad \omega_0 = 2\pi \nu_0. \quad (3.8)$$

On a

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m_e} E_\omega^0 e^{i\omega t}. \quad (3.9)$$

Nous ne nous intéressons pas aux solutions transitoires et cherchons une solution du type $x = x_0 e^{i\omega t}$

$$x_0 = \frac{e}{m_e} \frac{E_\omega^0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (3.10)$$

La polarisation

$$\vec{P} = N\vec{p} = Ne\vec{x} = \chi_r \vec{E} \quad \text{systeme de Gauss.} \quad (3.11)$$

La susceptibilité devient

$$\chi_r = \frac{Ne}{E} x \quad (3.12)$$

c'est-à-dire

$$\chi_r = \frac{Ne^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (3.13)$$

et la constante diélectrique relative $\epsilon_r = 1 + 4\pi\chi_r$

$$\epsilon_r = \hat{n}^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m_e} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} \quad (3.14)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on a

$$n^2 - n'^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad (3.15)$$

et

$$n n' = \frac{2\pi Ne^2}{m_e} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (3.16)$$

Hypothèse Dans un milieu gazeux peu dense (atmosphère, milieu interstel-

laire), $n \simeq 1$ et $n' \ll 1$. Alors

$$n n' \simeq n' \quad \text{et} \quad n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) \simeq 2(n - 1). \quad (3.17)$$

La première des expressions ci-dessus devient alors

$$n - 1 \simeq \frac{2\pi Ne^2}{m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad (3.18)$$

soit

$$n - 1 \simeq \frac{Ne^2}{2\pi m_e} \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \frac{\gamma^2 \nu^2}{4\pi^2}}. \quad (3.19)$$

Examinons le terme d'absorption

$$\kappa'_\nu = \frac{4\pi\nu n'}{c}, \quad (3.20)$$

$$\kappa'_\nu = \frac{\pi Ne^2}{m_e c} \frac{4\gamma\nu^2}{4\pi^2 (\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \gamma^2 \nu^2}. \quad (3.21)$$

Au voisinage de la résonance, avec $\nu_0^2 - \nu^2 \simeq 2\nu(\nu_0 - \nu)$ on a

$$n - 1 \simeq \frac{Ne^2}{4\pi m_e \nu} \frac{(\nu_0 - \nu)}{(\nu_0 - \nu)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2} \quad (3.22)$$

et

$$\kappa'_\nu \simeq \frac{\pi Ne^2}{m_e c} \frac{\gamma}{4\pi^2 (\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (3.23)$$

On rappellera que dans le système de Gauss, $e^2 = 23.07 \cdot 10^{-20} \text{ erg} \cdot \text{cm}$. Le terme $\frac{\gamma}{4\pi^2 (\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$ est appelé *profil de Lorentz*. Si l'on intègre le profil de Lorentz sur toutes les fréquences, on obtient l'opacité totale. En posant $x = 4\pi(\nu - \nu_0)/\gamma$ et en observant que $-4\pi\nu_0/\gamma \sim -\infty$, on obtient

$$\kappa = \frac{\pi Ne^2}{m_e c} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi Ne^2}{m_e c}. \quad (3.24)$$

Ce résultat classique prédit une valeur unique de l'opacité quelle que soit la transition considérée. Ceci n'est pas surprenant puisque dans cette théorie aucune référence n'est faite aux différents niveaux entre lesquels les transitions électroniques s'effectuent. La mécanique quantique montre que l'opacité en réalité peut différer beaucoup selon la transition considérée. Souvent on écrit l'opacité due à une transition donnée comme

$$\kappa = \frac{\pi N_i e^2}{m_e c} f_{ij}, \quad (3.25)$$

où f_{ij} est appelé la *force d'oscillateur* de la transition et N_i est le nombre d'oscillateurs par unité de volume capable d'absorber un photon par la transition ij . D'une manière imagée, on peut voir f_{ij} comme un nombre effectif

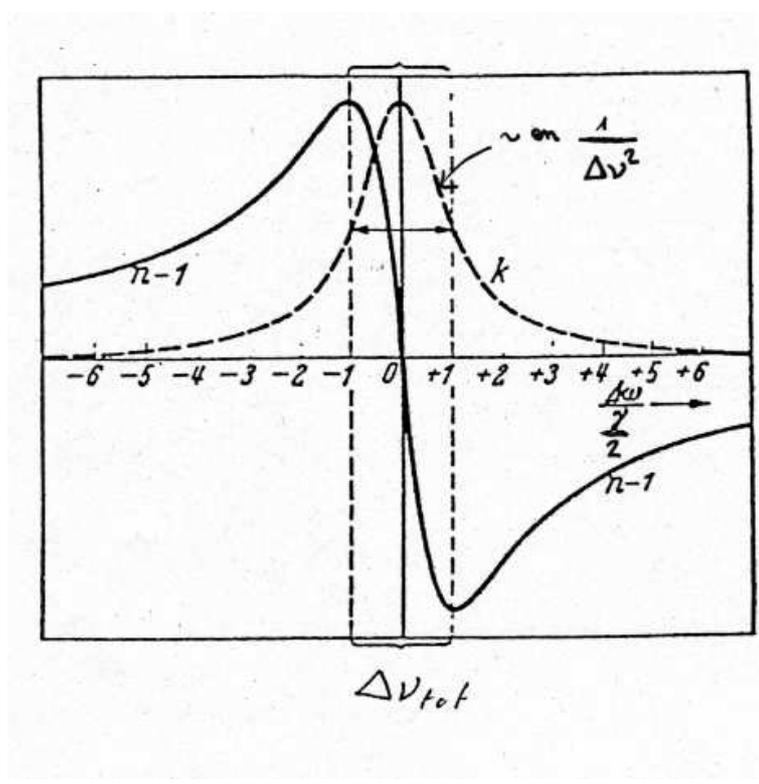


FIG. 3.1 – Variation de κ'_ν et de $n - 1$ autour de la fréquence de résonance.

d'oscillateurs classiques impliqués dans la transition considérée. Ce n'est que pour les transitions les plus fortes que f_{ij} approche l'unité.

Remarques concernant l'équation 3.23

- Lorsque $\nu < \nu_0$, $n > 1$, la vitesse de phase est inférieure à c . Si $\nu > \nu_0$, $n - 1 < 0$, $n < 1$. Dans ce cas la vitesse de phase est supérieure à c .
- n varie rapidement au voisinage de la résonance. Dans le domaine de fréquence $\nu_0 - \gamma/4\pi < \nu < \nu_0 + \gamma/4\pi$, on peut montrer que l'indice de réfraction décroît quand la fréquence augmente. Ceci correspond à la dispersion anormale. Lorsqu'une augmentation de fréquence correspond à une augmentation d'indice de réfraction, on parle de dispersion normale. Notons que lorsque la fréquence est très éloignée de la fréquence de résonance, n tend vers l'unité et la lumière se comporte comme dans

le vide.

- L'absorption dépend du nombre N d'oscillateur par unité de volume.
- Le coefficient d'absorption κ'_ν présente un pic symétrique autour du maximum.

Largeur à mi-hauteur :

$$\kappa'_\nu = \frac{\pi N e^2}{m_e c} \frac{\gamma}{4\pi^2 \Delta\nu^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (3.26)$$

Elle s'obtient pour $\Delta\nu^2 = \frac{\gamma^2}{16\pi^2}$. La largeur totale sera

$$\Delta\nu_{tot} = \frac{\gamma}{2\pi}, \quad (3.27)$$

ou

$$\Delta\lambda_{tot} = \frac{2\pi\gamma c}{\omega_0^2}. \quad (3.28)$$

Avec $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{m_e c^3}$ (voir ci-dessous), on obtient

$$\Delta\lambda = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{m_e c^2} = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ Angstroms}, \quad (3.29)$$

C'est la largeur naturelle de la raie.

Largeur naturelle

Considérons le dipôle oscillant sans force extérieure

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.30)$$

Posons $x = x_0 e^{i\alpha t}$, on a

$$\alpha \simeq \omega_0 + \frac{i\gamma}{2} \quad (3.31)$$

car γ est faible par rapport à ω_0 . On a

$$x = x_0 e^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega_0 t)} \quad (3.32)$$

Dans le système d'unités de Gauss, le rayonnement de freinage est (voir cours

d'électrodynamique) :

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{2 e^2 \ddot{x}^2}{3 c^3} \quad (3.33)$$

Calculons \dot{x} et \ddot{x}

$$\ddot{x} = x_0 e^{i\omega_0 t - \frac{\gamma t}{2}} \left(-\omega_0^2 - \frac{2\gamma i \omega_0}{2} + \frac{\gamma^2}{4} \right) \quad (3.34)$$

dont la partie réelle est

$$R_e(\ddot{x}) = x_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[\left(-\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) \cos \omega_0 t + \gamma \omega_0 \sin \omega_0 t \right] \quad (3.35)$$

Avec $\gamma \ll \omega_0$ et en moyennant sur une période, on a

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{e^2}{c^3} x_0^2 \omega_0^4 e^{-\gamma t} \quad (3.36)$$

L'énergie totale $U = E_{cin} + E_{pot}$, mais $\overline{E_{cin}} = \overline{E_{pot}}$, donc

$$\overline{U} = m_e \overline{\dot{x}^2} \quad (3.37)$$

$$\overline{U} = m_e x_0^2 \omega_0^2 e^{-\gamma t} \overline{\sin^2 \omega_0 t} \quad (3.38)$$

$1/\gamma$ est le temps pour que l'énergie du dipôle décroisse d'un facteur e .

$$\frac{dU}{dt} = -\gamma U. \quad (3.39)$$

En remplaçant dans l'Eq. (3.39), les expression pour dU/dt et U données par les équations (3.36) et (3.38), on trouve γ ,

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{c^3 m_e} \simeq 2.5 \cdot 10^{-22} \nu_0^2 [\text{sec}^{-1}], \quad (3.40)$$

où nous avons utilisé la valeur de la charge de l'électron dans le système de Gauss ($e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ ues = $1/(2.998 \times 10^9)$ C). Dans le système MKSA on a

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{c^3 m_e 4\pi\epsilon_0}, \quad (3.41)$$

dans ce cas la charge s'exprime en C ($e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C) et la permittivité ou constante diélectrique du vide

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2} = 8.85 \cdot 10^{-21} \text{C}^2 \text{dyne}^{-1} \text{cm}^{-2}.$$

Le temps de vie du niveau (c'est-à-dire de l'oscillateur) est

$$T = \frac{1}{\gamma} \simeq 10^{-8} \text{sec} \text{ dans le domaine optique } \lambda = 5000 \text{ Angstroms} \quad (3.42)$$

Cas quantique

La largeur naturelle est une propriété inhérente des raies spectrales qui résulte du principe d'incertitude. L'indétermination ΔE de l'énergie d'un atome qui passe un temps T dans un état est

$$\Delta E = \frac{\hbar}{T} \quad (3.43)$$

c'est-à-dire qu'un atome dans un niveau d'énergie E_0 a une énergie comprise entre $E_0 - \hbar/T$ et $E_0 + \hbar/T$. Ce flou produit l'élargissement naturel de la raie.

Au lieu de

$$\kappa'_\nu = \frac{\pi e^2 N}{m_e c} \frac{\gamma}{4\pi^2(\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (3.44)$$

on a, en considérant les transitions entre deux niveaux n et n' (n' : niveau inférieur ; n : niveau supérieur).

$\gamma \longrightarrow \Gamma_n + \Gamma_{n'}$: somme des largeurs des deux niveaux considérés.

$N \longrightarrow N_{n'} f_{n',n}$ avec $f_{n',n}$: force d'oscillateur. C'est le nombre effectif d'électrons dans l'atome qui peuvent effectuer la transition $n' \rightarrow n$. Les forces d'oscillateur sont déterminées empiriquement en laboratoire. Pour l'hydrogène, on a des expressions analytiques (formule de Kramers).

$$H_\alpha \quad f_{23} = 0.641$$

$$H_\beta \quad f_{24} = 0.119$$

$$H_\gamma \quad f_{25} = 0.044$$

$$H_\delta \quad f_{26} = 0.021$$

$$H_\epsilon \quad f_{27} = 0.012$$

$N_{n'}$: nombre d'électrons dans le niveau inférieur n' donné par Boltzmann-Saha.

$$\nu_0 \longrightarrow \nu_{n'n} = \frac{E_n - E_{n'}}{h}$$

et finalement

$$\kappa'_\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} N_{n'} f_{n'n} \frac{\Gamma_n + \Gamma_{n'}}{4\pi^2(\nu_0 - \nu)^2 + \frac{(\Gamma_n + \Gamma_{n'})^2}{4}} \quad (3.45)$$

Remarque L'expression ci-dessus doit être corrigée de l'émission induite.

L'émission induite est le processus par lequel un électron occupant un niveau d'énergie donné passe à un niveau d'énergie inférieur suite au passage d'un photon d'énergie égale à la différence d'énergie entre les deux niveaux. L'émission induite étant spatialement fortement corrélée à la direction des photons incidents, le nombre effectif d'absorption sera réduit du facteur d'émission induite

$$(1 - e^{-h\nu_0/kT}) \quad (3.46)$$

L'émission induite diffère de l'émission spontanée. L'émission spontanée survient sans stimulation extérieure.

3.3 Absorption par les raies spectrales

L'opacité due aux raies peut souvent être négligée à haute température dans les intérieurs stellaires. Dans les régions plus froides, toutefois cette opacité peut devenir importante.

L'analyse des raies spectrales est une source extraordinaire d'information en Astrophysique. Ce vaste sujet sera plus amplement développé au cours sur le *Transfert radiatif*. Nous nous bornerons ici à quelques propriétés importantes de l'absorption par les raies spectrales. Ecrivons κ'_ν de la manière générale

$$\kappa'_\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} N_{n'} f_{n'n} \phi_\nu, \quad (3.47)$$

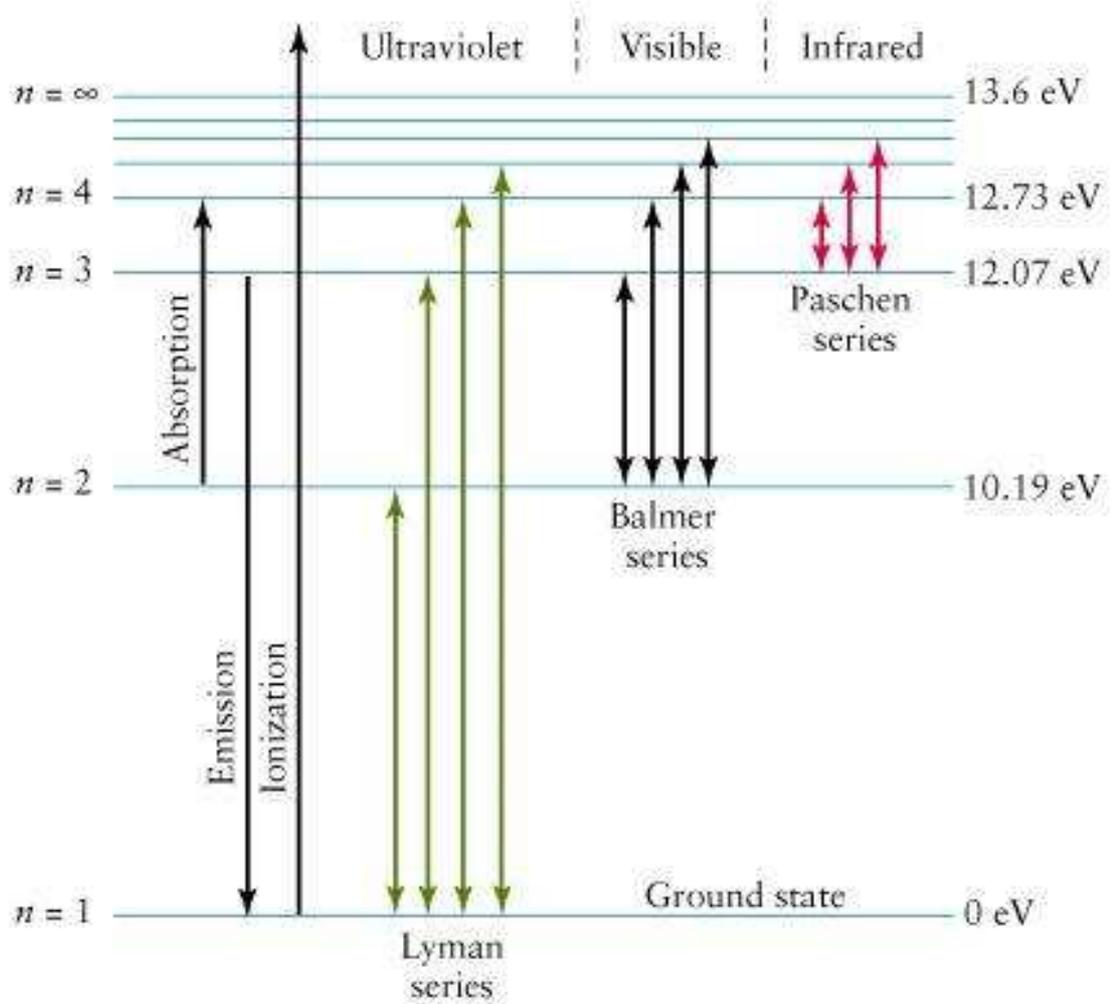


FIG. 3.2 – Transitions électroniques de l'atome d'hydrogène.

ϕ_ν est la fonction d'élargissement. Elle résulte de plusieurs effets qui changent légèrement la fréquence d'absorption. Si une transition entre n' et n se produit, $\phi_\nu d\nu$ est la probabilité que la fréquence du photon absorbé se trouve entre ν et $\nu + d\nu$. En effet

$$\int_0^\infty \phi_\nu d\nu = 1 \quad (3.48)$$

– **Elargissement par collisions :**

Les collision des atomes avec les autres particules du milieu réduisent la durée de vie de l'oscillateur. Pour la plupart des atomes la fonction d'élargissement due aux collisions a la même forme que l'élargissement naturel, mais

$$\gamma_{\text{coll}} = \frac{2}{T} \quad (3.49)$$

T est l'intervalle de temps moyen entre deux collisions d'un même atome. La largeur résultante est alors

$$\gamma_{\text{tot}} = \gamma_{\text{naturelle}} + \gamma_{\text{coll}} \quad (3.50)$$

– **Effet Doppler thermique :**

L'agitation thermique produit des mouvements aléatoires des atomes par rapport à l'observateur et les atomes absorbent et émettent à des fréquences voisines de la fréquence ν_0 de laboratoire. Pour un atome s'approchant à la vitesse v_x , l'absorption effective se fera en

$$\nu' = \nu_0 + \frac{v_x \nu_0}{c} \quad (3.51)$$

Le coefficient d'absorption par atome $a_\nu = \kappa'_\nu / N_{\nu'}$ devient en remplaçant ν_0 par ν'

$$a_\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{n'n} \frac{\gamma_{\text{tot}}}{4\pi^2 \left(\nu_0 + \frac{v_x}{c} \nu_0 - \nu\right)^2 + \frac{\gamma_{\text{tot}}^2}{4}} \quad (3.52)$$

Pour obtenir le coefficient moyen par atome, il faut intégrer sur le spectre des vitesses de Maxwell-Boltzmann selon la direction choisie

$$\frac{dN_x}{N} = \frac{m^{1/2}}{(2\pi kT)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{m v_x^2}{kT}} dv_x \quad \mathbf{m : \text{masse atomique}} \quad (3.53)$$

On obtient pour le coefficient moyen par atome pour la transition considérée :

$$\bar{a}_\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{n'n} \frac{\gamma_{\text{tot}}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}} dv_x}{\left(\nu_0 + \frac{v_x \nu_0}{c} - \nu\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{\text{tot}}}{4\pi}\right)^2} \quad (3.54)$$

La largeur Doppler thermique typique est

$$\Delta\nu_{\text{Doppler}} = \frac{\nu_0 v}{c} = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_{\text{turb}}^2}. \quad (3.55)$$

Pour v , on a pris $\bar{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, le module de la vitesse la plus probable (le vecteur vitesse moyen est nul dans le cas de l'agitation thermique). On ajoute (arbitrairement) pour reproduire les profils observés une vitesse dite de microturbulence v_{turb} . L'élargissement du centre de la raie est déterminé par l'effet Doppler. Les ailes, si présentes, sont déterminées par les processus de collisions. En général, les termes γ sont faibles et la partie Doppler domine.

QUESTION : *Calculer la largeur Doppler d'une raie à 5000 Å due aux mouvements thermiques à la température de 5700 K.*

QUESTION : *La raie d'un élément léger comme le carbone est-elle plus large, plus étroite que la raie d'un élément lourd comme le Fer ? Les deux raies sont supposées être formées dans la même région de la photosphère.*

D'autres causes d'élargissement existent :

- **Effet Doppler** dû à des mouvements macroscopiques (convection, rotation, ...).
- **Effet Stark** (surtout pour H et He) : le passage des ions au voisinage d'atomes produit un champ électrique perturbateur.
- **Effet Zeeman** : étoiles magnétiques, taches solaires.

Remarque

Pour calculer le profil d'une raie, il faut en principe connaître d'abord la structure de l'atmosphère, c'est-à-dire les valeurs de la pression et de la

température en fonction de la profondeur optique ou du rayon (voir chapitre 2).

3.4 Diffusion par les électrons libres

Un électron libre ne peut absorber un photon, mais seulement le diffuser, en vertu des lois de conservation. Reprenons les expressions (3.19) et (3.21) pour $n - 1$ et κ'_ν et considérons le cas où $|\nu_0^2 - \nu^2| \gg \gamma\nu$. On obtient

$$n - 1 = \frac{Ne^2}{2\pi m_e} \frac{1}{(\nu_0^2 - \nu^2)} \quad (3.56)$$

$$\kappa'_\nu = \frac{8\pi}{3} \frac{Ne^4}{m_e^2 c^4} \frac{1}{\left[\left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 - 1\right]^2}. \quad (3.57)$$

Pour des électrons peu liés ou libres, $\nu_0 \rightarrow 0$, et alors on peut avoir $\nu \gg \nu_0$, d'où

$$\kappa'_\nu = \frac{8\pi Ne^4}{3m_e^2 c^4} = 0.665 \cdot 10^{-24} N \quad (3.58)$$

où N est le nombre d'électrons libres par cm^{-3} . La section efficace σ est définie par $\kappa'_\nu = N\sigma$ et l'on a

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 = 0.665 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (3.59)$$

QUESTION : *En quelles unités la charge de l'électron doit-elle être prise pour obtenir cette valeur numérique ?*

C'est la section efficace de la diffusion Thomson. L'opacité κ de la diffusion Thomson est alors

$$\kappa = \frac{\kappa'}{\rho} = \frac{N_e \sigma_{Th}}{\rho} \quad \text{avec} \quad N_e = \frac{\rho}{2m_H} (1 + X)$$

où X est la fraction de masse de l'hydrogène (cf. chapitre 4) et où l'on a fait l'hypothèse d'un milieu complètement ionisé.

$$\kappa = \frac{\sigma_{Th}}{2m_H} (1 + X) = 0.2(1 + X) \text{ [cm}^2 \text{ g}^{-1}\text{]}. \quad (3.60)$$

La diffusion Thomson est indépendante de la fréquence et isotrope.

QUESTION : *La diffusion par les noyaux est-elle importantes ?*

Remarque

Lors de la diffusion d'un photon par un électron la longueur d'onde du photon est augmentée de $2\lambda_c \sin^2 \vartheta/2$ où

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 0.00242 \text{ Angstroem} \quad (3.61)$$

est la longueur d'onde Compton, et ϑ est l'angle de diffusion. Ce décalage en λ n'est important qu'aux énergies élevées (diffusion Compton). Soit pour $\alpha \geq 1$, avec

$$\alpha = \frac{h\nu}{m_e c^2} = \frac{\lambda_c}{\lambda} \quad (3.62)$$

Ceci se produit lorsque les températures sont telles que $kT \sim h\nu > m_e c^2$, soit pour $T \geq 5 \cdot 10^9$ K. Pour ces températures proches de la température de seuil de l'électron, l'opacité doit être corrigée de la manière suivante

$$\sigma_e = \sigma_{Th} \left(1 - 2\alpha + \frac{26}{5}\alpha^2 + \dots \right). \quad (3.63)$$

Pour $\alpha \ll 1$, on a la diffusion Thomson. Dans ce cas la dégénérescence n'a pas d'effet car l'électron reste dans la même cellule de l'espace de phase.

Note sur la diffusion Rayleigh

Repartons des équations (3.56) et (3.57). Considérons le cas où $\nu \ll \nu_0$. C'est le cas, par exemple, de la lumière solaire agissant sur les molécules de l'atmosphère terrestre. ν_0 est élevé car les électrons sont fortement liés aux atomes et molécules. On a

$$\kappa_\lambda = \frac{\kappa'_\lambda}{\rho} = \frac{32\pi^3}{3} \frac{(n-1)^2}{N\lambda^4\rho} \quad (3.64)$$

Il s'agit de la loi de diffusion de Rayleigh. Le rayonnement bleu est plus diffusé que le rouge, d'où la couleur bleue du ciel.

Remarques

1. La diffusion Rayleigh agit dans les milieux où la taille des particules est inférieure à $(0.1 - 0.2) \lambda$. Si les dimensions des particules diffusantes augmentent, on a que l'intensité diffusée I varie comme

$$I \sim \frac{1}{\lambda^p} \quad \text{avec } 0 < p < 4 \quad (3.65)$$

Pour la vase atmosphérique, $p \rightarrow 0$, ciel blanc.

2. La variation angulaire de l'intensité diffusée est donnée par une indicatrice de diffusion $I(\vartheta)$. La lumière diffusée est partiellement polarisée.
3. Les principaux absorbants de l'atmosphère terrestre sont schématiquement N_2 , O , O_2 , NO , éléments ionisés à 70–100 km d'altitude (ionosphère).
4. La diffusion Rayleigh peut être importante dans l'atmosphère des étoiles de type spectral G et K. Dans l'atmosphère de ces étoiles, la plus grande partie des atomes d'hydrogène sont neutres et se trouvent dans leur état fondamental. Les fréquences de résonances correspondants aux transitions Lyman se trouvent dans l'UV lointain. Les photons visibles ont donc des fréquence $\nu \ll \nu_0$ où ν_0 est une fréquence de la série de Lyman. Donc les photons visibles interagissent avec les transitions Lyman par le processus de la diffusion Rayleigh.

Fréquence de plasma : transmission dans l'ionosphère

Nous allons repartir de l'expression (3.15), en supposant, comme nous l'avions fait plus haut que $n \gg n'$, mais que n n'est pas forcément proche de un,

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (3.66)$$

Dans ce cas, on a pour γ négligeable et pour $\nu \gg \nu_0$ (électrons très peu liés)

$$n^2 = 1 - \frac{N e^2}{\pi m_e \nu^2} \quad (3.67)$$

Pour que l'onde soit transmise, il faut que $n^2 > 0$, d'où

$$\nu > \left(\frac{N e^2}{\pi m_e} \right)^{1/2} \quad (3.68)$$

Pour des fréquences plus faibles que la valeur critique, l'onde est totalement réfléchie. Dans l'atmosphère terrestre, la fréquence critique est environ 28 MHz, soit $\lambda = 10 m$. La réflexion pour $\lambda > \lambda_{crit}$ permet la transmission des ondes radio autour de la Terre ; pour les longueurs d'onde plus courtes, il faut le relais des satellites.

3.5 Photoionisation ou absorption bound-free

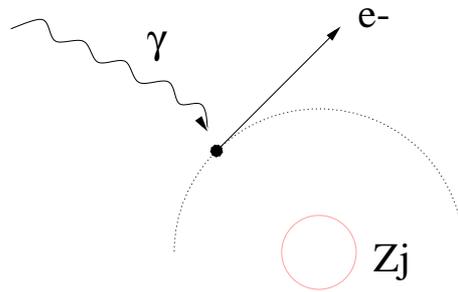


FIG. 3.3 –

Un électron lié est éjecté par un photon incident et devient un électron libre (voir Fig. 3.3). Le coefficient d'absorption d'un photon de fréquence ν par un électron sur le niveau n et un ion de charge Z_j est

$$a_{bf} = \frac{64 \pi^4 m_e e^{10}}{3^{3/2} c h^6} \frac{Z_j^4}{n^5 \nu^3} g_{bf} \quad (3.69)$$

g_{bf} est un facteur sans dimension appelé facteur de *Gaunt*, qui apporte une correction à l'expression semi-classique, $g_{bf} \sim 1$ et varie lentement avec n et ν . La charge $e^2 = 23.07 \cdot 10^{-20}$ erg cm. Cette expression est dérivée dans l'approximation hydrogénoïde. Toutefois, lorsque l'atome a plus d'un électron lié, la charge Z_j doit être remplacée par une charge effective tenant compte de l'effet d'écran.

L'absorption $b-f$ ne se produit que pour des photons d'énergie supérieure au potentiel d'ionisation du niveau considéré

$$h \nu > I = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \frac{Z^2}{n^2} = R \frac{Z^2}{n^2} \quad (3.70)$$

où R est un Rydberg. Le coefficient d'absorption pour un élément consiste en une ou deux séries de continus correspondant aux divers états d'ionisation présents.

Remarque

- Une éventuelle dégénérescence du gaz électronique réduit σ_{bf} , car les cellules de l'espace de phase des électrons sont occupées.
- Le coefficient atomique doit être multiplié par le nombre d'atomes par unité de volume, c.à.d. par $N_j = \frac{X_j \rho}{A_j m_H}$ et par le nombre moyen \bar{n}_e d'électrons sur la couche n de l'élément j . Il faut également sommer sur les différents éléments j ,

$$\kappa'_{bf}(\nu) = \rho \kappa_{bf}(\nu) = \sum_{j,n} a_{bf}(j, n, \nu) \frac{X_j \rho}{A_j m_H} \bar{n}_e \quad (3.71)$$

On somme sur les niveaux n et les éléments j , \bar{n}_e s'obtient à l'aide de l'expressions de Saha (cf chapitre 4).

- Le coefficient d'absorption bound-free doit être corrigé de l'émission induite.

La Fig. 3.4 montre la variation de a_{bf} en fonction de la longueur d'onde. La Fig. reffig :opacH montre la variation de l'opacité par atome d'hydrogène en fonction de la longueur d'onde et de la température. L'effet de l'opacité bound-free sur le spectre continu d'un astre est illustré schématiquement à la Fig. 3.6. Le cas du spectre de l'étoile VEGA est montré en Fig. 3.7.

3.6 Transitions hyperboliques : *absorption free-free* et *Bremsstrahlung*

Un électron de vitesse v dans le champ coulombien d'un ion de charge Z_j peut absorber (absorption *ff*) ou émettre (Bremsstrahlung) un photon de fréquence ν . Dans l'approximation hydrogénoïde, l'absorption *ff* pour un ion et un électron libre par cm^3 est

$$a_{ff} = \frac{4\pi e^6}{3^{3/2} ch m_e^2} \frac{Z_j^2}{v} \frac{g_{ff}}{\nu^3} \quad (3.72)$$

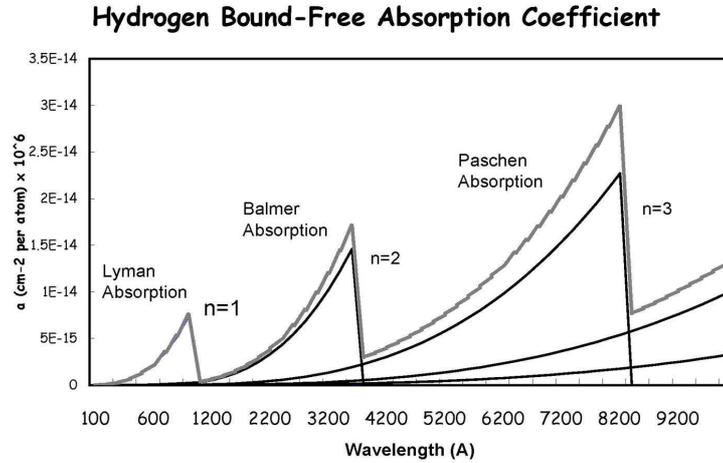


FIG. 3.4 – Opacité bound-free par atome d'hydrogène.

g_{ff} est le facteur de *Gaunt* pour le processus free-free. Cette absorption n'est pas limitée en fréquence et est continue. Pour obtenir le coefficient d'absorption κ_{ff} , il faut intégrer sur le spectre maxwellien des vitesses $dn_e(v)$ et sommer sur les éléments j :

$$\kappa'_{ff}(\nu) = \kappa_{ff}(\nu) \cdot \rho = \sum_j \int a_{ff} \frac{X_j \rho}{A_j m_H} dn_e(v) \quad (3.73)$$

Remarques

- 1) Dans le cas partiellement dégénéré, il faut utiliser pour $dn_e(v)$ la statistique de *Fermi-Dirac* et non celle de *Maxwell-Boltzmann*. Il faut aussi tenir compte du fait que l'état final de l'électron peut être occupé.
- 2) Aux concentrations n_e élevées, des effets d'écran électrostatique peuvent intervenir.
- 3) Il faut tenir compte de l'émission induite.
- 4) L'absorption b-f est plus importante que l'absorption f-f dans les étoiles de Pop I (comparer la dépendance en Z_j). Dans les étoiles de Pop. II, déficientes en métaux, l'absorption f-f peut dominer.

L'opacité due à l'ion H^- est montrée en Fig. 3.8. Les opacités typiques des étoiles de type spectral G, A et B sont montrées en Figs. 3.9, 3.10 et 3.11.

Wavelength dependence of $\kappa(H)$

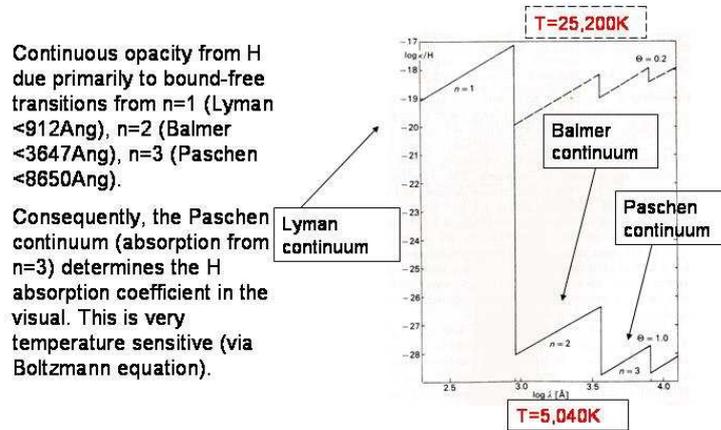


FIG. 3.5 – Opacité continue due à l'hydrogène. Noter la grande variation en fonction de la température, $\theta = 5040/T$.

La source dominante d'opacité en fonction du type spectral en surface est montrée en Fig. 3.12, en fonction de la profondeur optique pour une étoile ayant les caractéristiques indiquées sur la figure, en Fig. 3.13.

3.7 L'opacité globale dans le milieu stellaire

L'opacité κ est l'une des données essentielles pour construire les modèles stellaires et les modèles d'atmosphères.

Les principaux mécanismes d'absorption sont :

- les raies spectrales (bf)
- la photoionisation (bf)
- les transitions hyperboliques (ff)
- la diffusion par les électrons libres

Leur importance relative varient suivant les conditions physiques : ρ , T , composition.

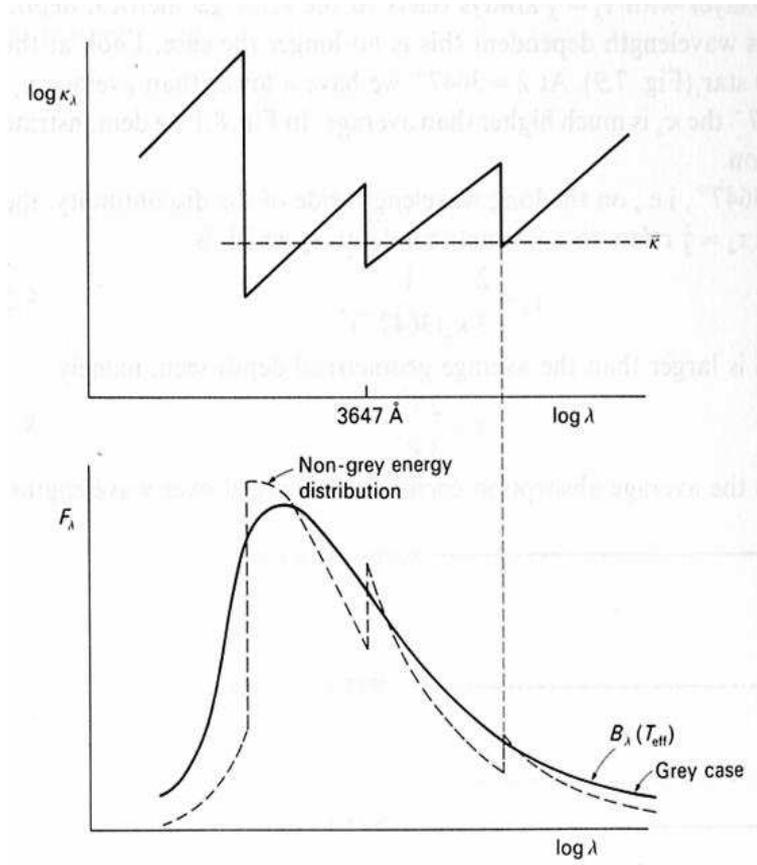


FIG. 3.6 – Cette figure illustre la manière dont l'opacité bf affecte le rayonnement continu d'un astre.

Le coefficient d'absorption global à la fréquence ν est donc

$$\kappa_\nu = [\kappa_{bf}(\nu) + \kappa_{ff}(\nu) + \kappa_{fb}(\nu)] (1 - e^{-h\nu/kT}) + \kappa_{Th} \quad (3.74)$$

Les termes atomiques doivent être corrigés de l'émission induite. Les processus mentionnés ci-dessus sont les principaux mécanismes d'absorption. Dans les tables numériques d'opacités récentes, de nombreux autres effets sont aussi pris en considération :

- Diffusion *Compton*
- Absorption bf et ff par les ions négatifs, en particulier H^-

Balmer jump in Vega

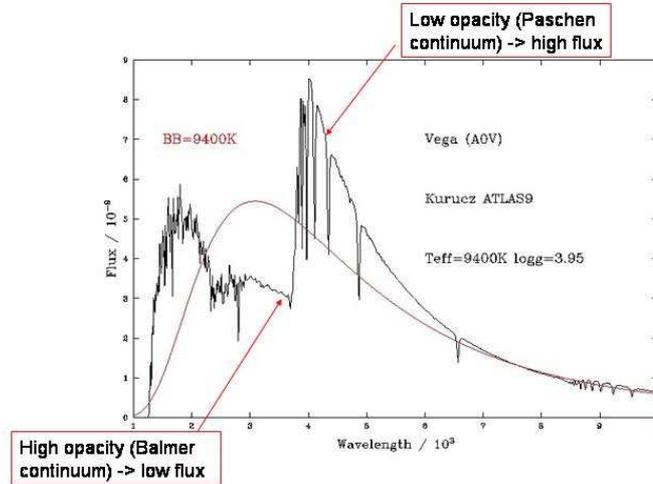


FIG. 3.7 – Spectre de l'étoile Vega (α -Lyrae).

- Diffusions cohérentes *Raman* et *Rayleigh*
- Absorptions moléculaires ($T \leq 4 \cdot 10^3 K$)
- Production de paires $e^+ e^-$

Pour les termes dépendant de la fréquence ν , la moyenne de *Rosseland* doit être effectuée (cf. chapitre 2).

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\frac{dB}{dT}} \quad (3.75)$$

qui pondère fortement les valeurs de κ_ν pour ν tel que $\frac{h\nu}{kT} \simeq 4$.

Aujourd'hui, l'utilisation des opacités en structure interne des étoiles est grandement facilitée par l'existence de tables numériques donnant

$$\kappa = \kappa(\rho, T, \text{composition}) \quad (3.76)$$

Un programme de calcul des opacités est disponible à l'adresse Web suivante :

<http://www-phys.llnl.gov/Research/OPAL/index.html>

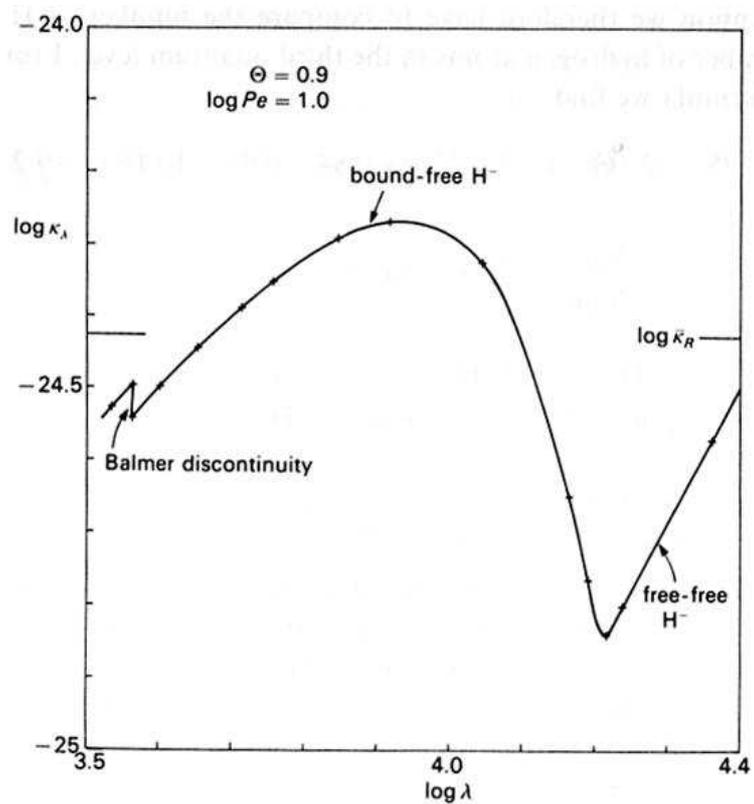


FIG. 3.8 – Opacité continue due à H^- , opacité typique des étoiles de type G.

La Fig. 3.12 montre comment l'opacité moyenne de Rosseland varie avec la température et la densité. La Fig. 3.13 indique la source dominante de l'opacité dans le plan température versus densité.

Pour T faible, à part les raies spectrales, il y a peu de transitions possibles et l'opacité est faible.

Le maximum des courbes correspond aux températures d'ionisation partielle de H et He, où le processus bf pour ces deux éléments est très important. En partant des basses T , κ augmente très fortement

$$\kappa \sim \rho^\alpha T^\beta \quad \alpha \sim 0.7 \quad \beta \sim 6 \text{ à } 10$$

Aux températures au-delà du maximum, l'opacité est due principale-

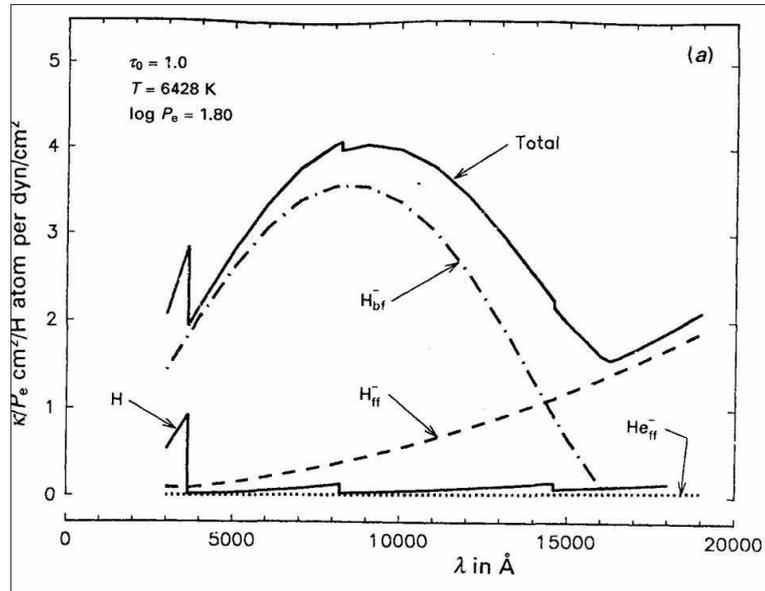


FIG. 3.9 – Décomposition de l’opacité continue due à l’hydrogène en ses différentes composantes.

ment aux éléments lourds (autres que H et He) partiellement ionisés. Avec T croissant, les éléments perdent leurs électrons et les possibilités de transitions bf diminuent. C’est le domaine régi par la loi de *Kramers*

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5} \quad (3.77)$$

Aux températures les plus élevées représentées, l’opacité est due à la diffusion par les électrons libres.

Dépendance vis à vis de ρ : en milieu peu ionisé, chaque atome absorbe indépendamment : l’absorption par unité de masse ne dépend pas de ρ . En milieu partiellement ionisé, l’absorption bf est conditionnée par les possibilités de repeuplement des niveaux électroniques, donc par n_e . Aussi l’absorption par unité de masse dépend-elle de ρ .

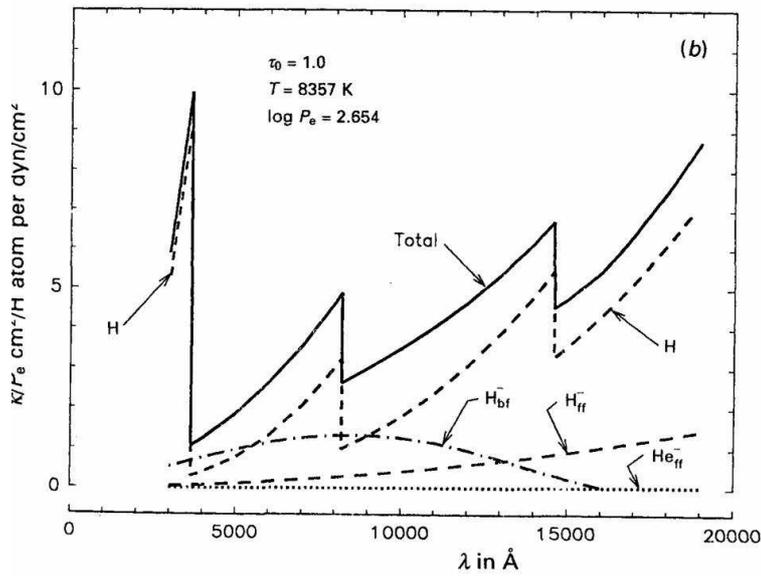


FIG. 3.10 – Opacité typique d’une étoile de type spectral A.

3.8 Note sur la largeur équivalente, la courbe de croissance et la détermination des abondances

La forme d’une raie d’absorption dépend de la quantité d’atomes ou d’ions absorbants le long de la ligne de visée. Ceci est illustré à la Fig. 3.16.

Il est possible de relier l’abondance de l’élément absorbant à la largeur équivalente définie ci-dessous.

Largeur équivalente

On utilise en général pour déterminer les abondances la largeur équivalente W (equivalent width, voir Fig. 3.17) :

$$W = \int_0^\infty \frac{I_{\text{cont}} - I_\nu}{I_{\text{cont}}} d\nu \quad \text{en } \text{Å} \text{ ou } \text{sec}^{-1} \quad (3.78)$$

I_{cont} est la distribution reconstituée du continu (sans la raie). W est une quantité facile à mesurer, très sensible à l’abondance et relativement peu sensible aux incertitudes théoriques sur le profil de raie. Considérons une

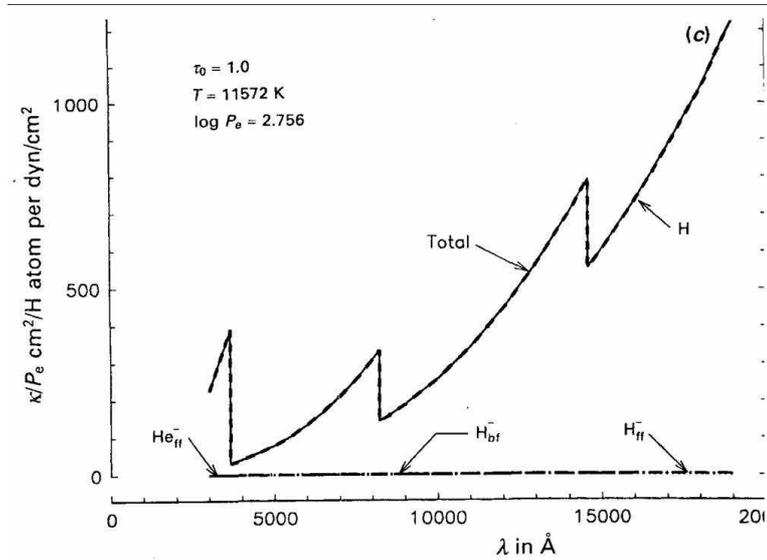


FIG. 3.11 – Opacité typique d’une étoile de type spectral B.

couche d’épaisseur ℓ et une intensité incidente I_c . Si la couche contient des atomes absorbants

$$I_\nu = I_c e^{-\tau_\nu}, \quad (3.79)$$

où l’on a introduit la profondeur optique τ_ν définie par

$$\tau_\nu = \kappa'_\nu \ell = a_\nu N \ell = a_0 N \ell \phi_\nu \quad (3.80)$$

avec

$$a_0 = \frac{\pi e^2}{m_e c} f \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right) \quad (3.81)$$

où N et f sont les concentrations et valeur f pour la transition atomique considérée (p. ex. $n' \rightarrow n$).

QUESTION : Donner les unités de a_0 , ϕ_ν et τ_ν .

La largeur équivalente devient

$$W = \int_0^\infty \left(1 - e^{-N\ell a_0 \phi_\nu}\right) d\nu \quad (3.82)$$

La courbe de croissance

Dominant Opacity vs. Spectra Type

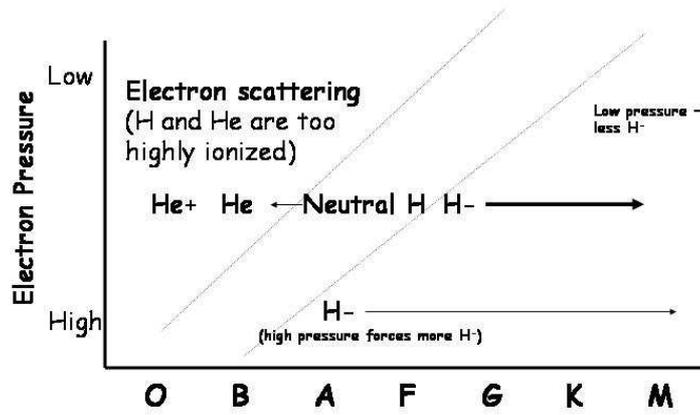


FIG. 3.12 – Source d'opacité dominante en surface selon le type spectral.

Sources of Opacity for $T_{\text{eff}}=4500$ $\text{Log } g = 1.5$

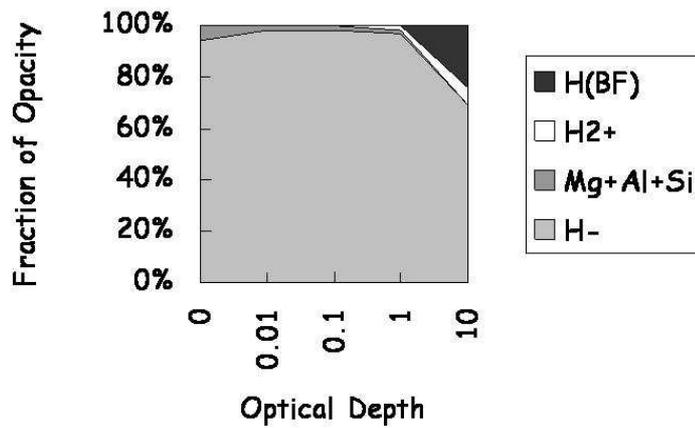


FIG. 3.13 – Source d'opacité dominante selon la profondeur optique.

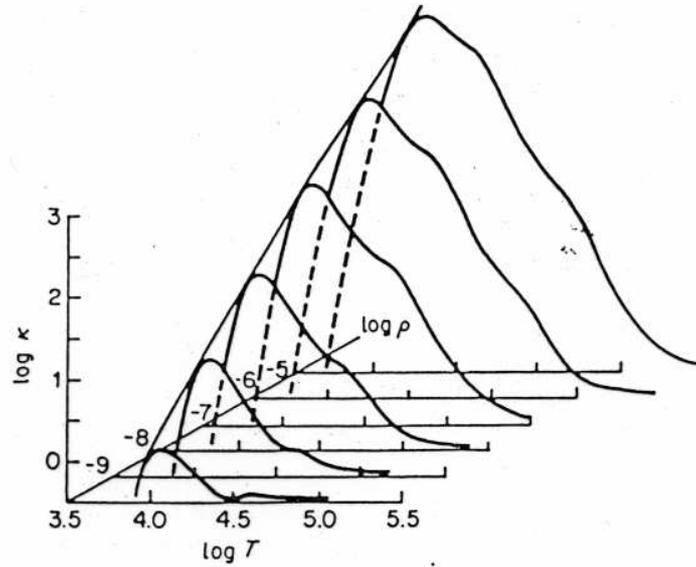


FIG. 3.14 – Variation de l'opacité en fonction de la température et de la densité.

La courbe de croissance est la courbe où $\log W$ (ou $\log W/\lambda_0$ par exemple) est porté en fonction du nombre d'atomes absorbants, mesuré par $\log Nf$ ou $\log gf$ (voir ci-dessous).

Cas de raies faibles, optiquement minces : $N \ell a_0 \phi_\nu \ll 1$

Dans ce cas, l'absorption est due à l'effet Doppler

$$W = N \ell a_0 \int_0^\infty \phi_\nu d\nu = \underline{N \ell a_0}. \quad (3.83)$$

La courbe de croissance est linéaire. La largeur équivalente est proportionnelle à la densité projetée $N \ell$ (column density). Cette approximation est valable pour les raies faibles stellaires et aussi pour les raies interstellaires dans les domaines optiques et radio.

Cas des raies fortes

Lorsque le nombre d'atomes absorbants augmente, le centre de la raie devient de plus en plus optiquement épais. La contribution des ailes restent toutefois

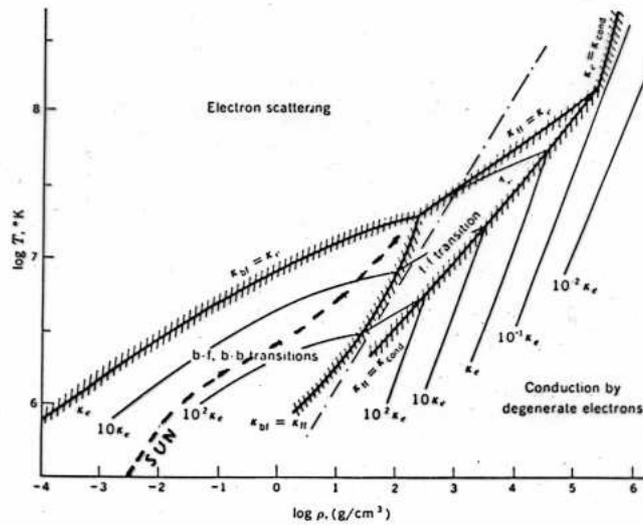


FIG. 3.15 – Source dominante de l’opacité dans le plan température versus densité. Les lignes d’opacité constante sont labélisée par leur valeur donnée en terme de l’opacité due à la diffusion par les électrons libres.

négligeable. L’absorption principale est toujours due à l’effet Doppler, mais il y a saturation (blocage des raies au centre). L’augmentation du nombre d’atomes n’augmente guère l’absorption. On peut montrer que dans ce domaine W varie comme $\sqrt{\log N}$ (voir par exemple l’ouvrage de David Gray *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*, cote 23.7/GRA, p. 323 et suivantes).

Cas des raies très fortes

Pour des raies très fortes, les ailes prennent de l’importance et il y a une dépendance (puissance 1/2) vis à vis du nombre d’atomes ($W \propto \sqrt{N}$).

La courbe de croissance peut donc être décomposée en trois parties. La dépendance entre largeur équivalente et densité de colonne est différentes dans chacune de ces trois parties (cf Fig. 3.18).

APPLICATIONS SIMPLES (en lecture)

La courbe de croissance d’une raie est un concept d’abord théorique. Par

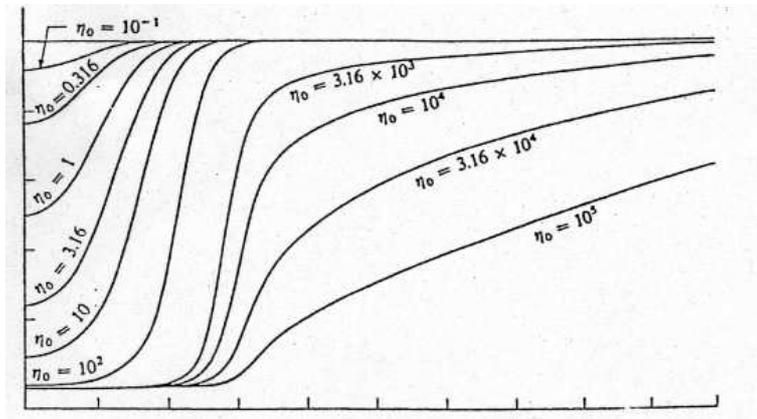


FIG. 3.16 – Variation de la forme d’une raie d’absorption lorsque le nombre d’atomes le long de la ligne de visée augmente. Pour $\eta_0 \leq 1$, la profondeur de la raie est directement proportionnelle au nombre d’atomes absorbants, pour $30 \leq \eta_0 \leq 1000$ la raie est saturée, mais les ailes ne se sont pas encore développées. Pour $\eta_0 \geq 10000$, les ailes sont fortes et contribuent fortement à la largeur équivalente de la raie.

une expérience de pensée, on étudie la variation de la largeur équivalente d’une raie lorsque le nombre d’absorbants responsables de la raie augmente, toutes les autres grandeurs restant constantes. Ce concept peut cependant être relié à l’observation en faisant l’hypothèse suivante. à savoir que la courbe de croissance que l’on obtiendrait pour différentes raies auraient à peu de chose près la même allure générale à savoir les trois parties décrites plus haut (raies faibles, fortes et très fortes).

Construction de la courbe de croissance

Considérons deux raies provenant d’un même multiplet (cf. Fig. 3.19). On a d’après Boltzmann (voir chapitre 4).

$$\frac{N}{N'} = \frac{g e^{-E/kT}}{g' e^{-E'/kT}} \quad (3.84)$$

Les énergies E et E' étant très voisines, on a en fait

$$\frac{N}{N'} = \frac{g}{g'} \quad \text{et} \quad \frac{Nf}{N'f'} = \frac{gf}{g'f'} \quad (3.85)$$

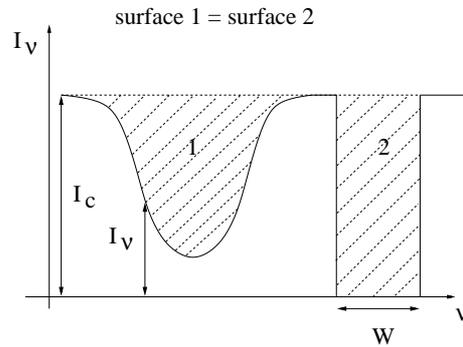


FIG. 3.17 –

Dans un multiplet, les valeurs relatives gf sont plus aisément déterminées théoriquement. Pour un multiplet, il est donc possible de porter

$$\log W \text{ en fonction de } \log Nf + \text{const}$$

ce qui donnera un petit segment de la courbe de croissance pour l'élément considéré. Un autre multiplet, dans la même région spectrale (pour le même élément) donne un autre segment qui ne coïncide pas avec le premier (cf. Fig. 3.20). Pour ajuster les divers segments il faut les déplacer par une constante différente pour chacun d'eux.

Température d'excitation d'un élément

Désignons par l'indice 0 le niveau fondamental d'un élément. Pour chaque raie (N, E, g) on a

$$\frac{Nf}{gf} = \frac{N_0 f_0}{g_0 f_0} e^{-E/kT} \quad (3.86)$$

c'est-à-dire $\log Nf - \log gf = \text{const} - \frac{5040 E(\text{eV})}{T}$.

Pour chaque raie de largeur équivalente W de chacun des multiplets considérés plus haut, on peut grâce à la courbe de croissance obtenir $\log Nf + \text{const}$. Les $\log gf$ étant connus, on peut construire la relation

$$\log Nf - \log gf \quad \text{vs.} \quad E(\text{eV})$$

La pente fournit $\frac{5040}{T}$, T est la température d'excitation de l'élément considéré, dont les raies se forment en moyenne à une certaine profondeur.

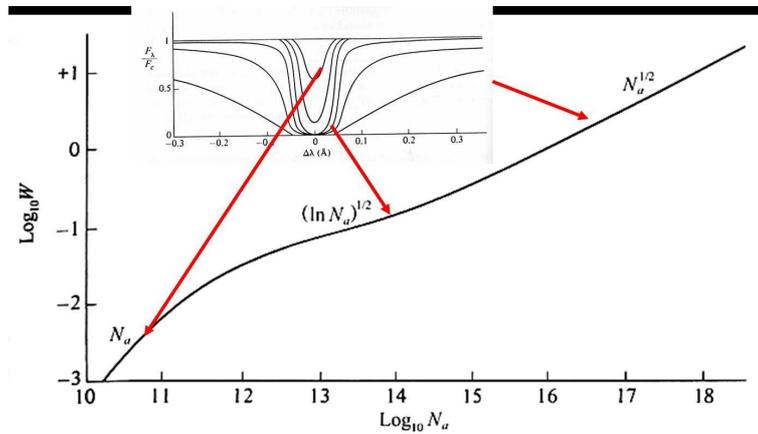


FIG. 3.18 – Forme de la raie et courbe de croissance.

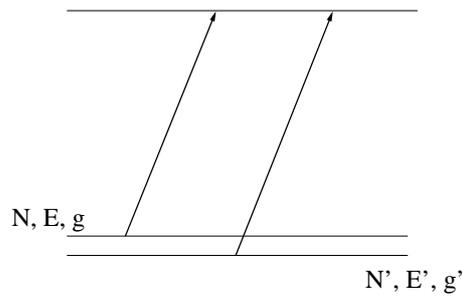


FIG. 3.19 –

Abondances relatives de deux éléments dans la même étoile

La loi de Boltzmann nous indique que

$$\frac{N_i}{N} = \frac{g_i e^{-E_i/kT}}{u(T)} \quad (3.87)$$

Le deuxième membre est connu grâce à T déterminée plus haut. Si les forces d'oscillateur sont connues, alors il est possible de porter $\log W$ en fonction de $\log \frac{N_i}{N} f_i$ pour chacun des deux éléments A et A' pour lesquels on aura appliqué la procédure précédente. Le décalage des deux courbes nous fournit

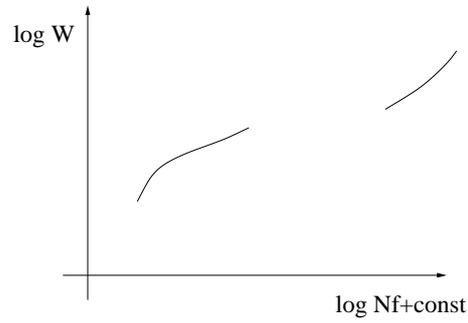


FIG. 3.20 –

(cf. Fig. 3.21)

$$\Delta = \log \frac{g_i f_i}{g'_i f'_i} - \log \frac{N}{N'} \quad (3.88)$$

La connaissance des grandeurs produits $g_i f_i$ permet de déduire l'abondance relative des deux éléments considérés, dans l'état d'ionisation examiné.

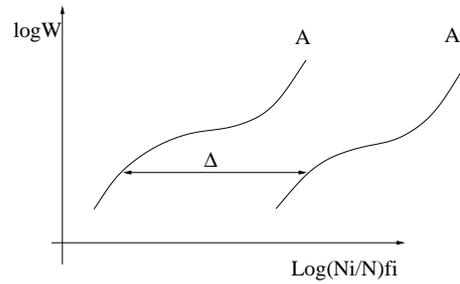


FIG. 3.21 –

Différence d'abondance d'un élément dans deux étoiles de même type spectral

Dans ce cas, le décalage horizontal des deux courbes de croissance fournit directement l'abondance différentielle. Dans des limites étroites, une correction de température peut être effectuée.

3.9 Note sur les abondances des éléments

Les éléments du tableau de Mendeleev peuvent se classés en différentes catégories montrées dans la Fig. 3.22

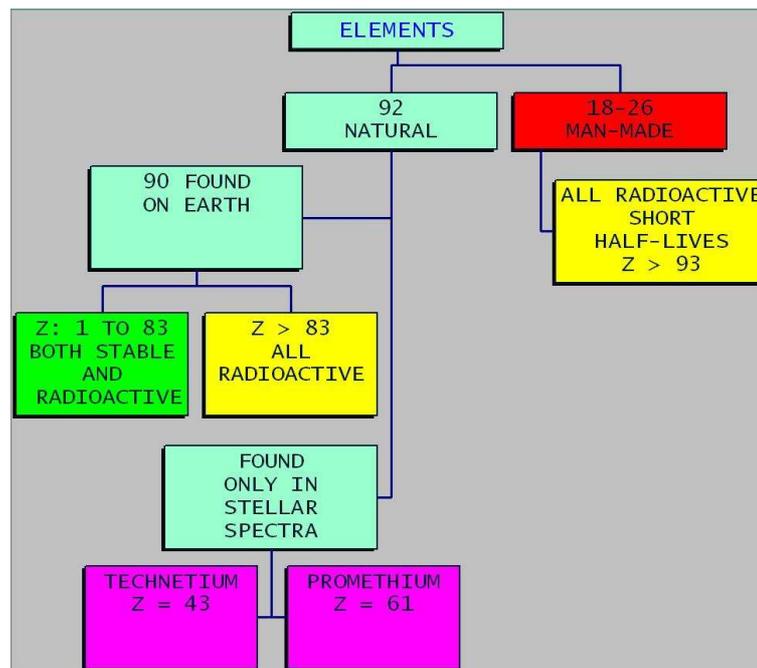


FIG. 3.22 – Les éléments peuvent être classifiés en différentes catégories.

Nos connaissances sur les abondances des éléments dans l'Univers proviennent :

- des analyses directes d'échantillons terrestres (voir Fig. 3.23), lunaires, météoritiques, dont les abondances ont été fortement modifiées lors de la formation du système solaire ;
- des spectres solaires et stellaires ;
- du rayonnement cosmique.

Les abondances des principaux éléments dans l'atmosphère solaire sont, en fraction de masse :

$$H : X = .70 \quad He : Y = .28 \quad \text{reste } Z = .02$$

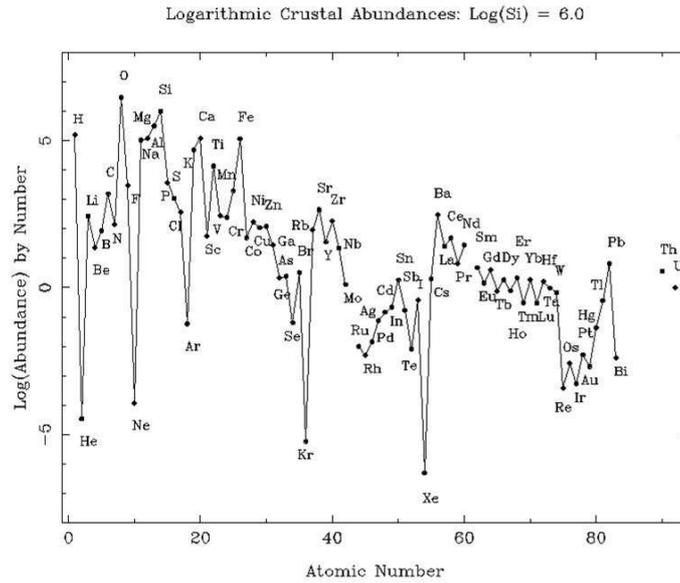


FIG. 3.23 – Abondances dans la croûte terrestre.

Dans Z , les principaux sont

^{12}C	: .0039	^{20}Ne	: .0015	Fe	: .0015
^{14}N	: .0009	^{24}Mg	: .0005		
^{16}O	: .0093	^{28}Si	: .0007		

On distingue quatre groupes dans la distribution des abondances en fonction de la masse atomique (voir Fig. 3.24)

1. **Pic de l'hydrogène.** Deux éléments extrêmement abondants : l'hydrogène représente 90% en nombre et 70% en masse de la matière solaire. l'hélium, 10% en nombre et 28% en masse. Le reste des éléments (appelés métaux) ne représente que 2% en masse. On constate une décroissance très rapide des abondances avec la masse atomique. Cette décroissance n'est toutefois pas monotone. Les abondances des éléments ayant un noyau constitué d'un nombre entier de particule α sont plus élevées. Les abondances des éléments ayant un noyau de masse paire sont généralement plus élevées que celles des éléments de noyau de masse impaire, $^{24}\text{Mg}/^{23}\text{Na}=16$ par exemple.

Logarithmic SAD Abundances: $\text{Log}(H) = 12.0$

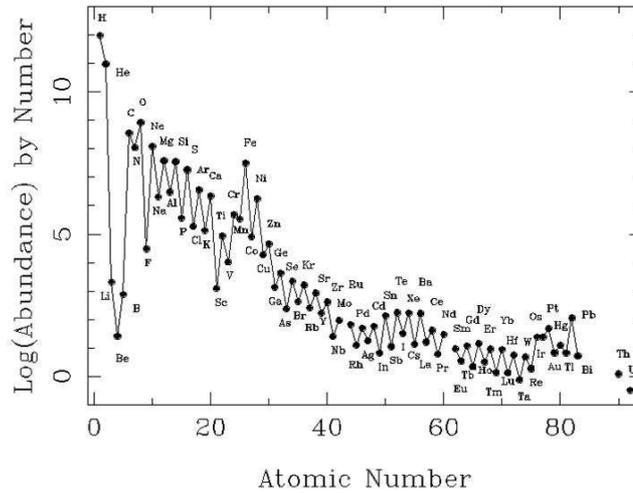


FIG. 3.24 – Abondances cosmiques.

2. **Le pic du Fer.** Autour du fer, la courbe remonte jusqu'à un maximum. Il s'agit du "pic du fer", qui regroupe les noyaux entre le chrome et le nickel.
3. **Les "collines" des éléments plus lourds que le fer.** Sur le versant du pic du fer correspondant aux noyaux de grande masse, la décroissance est moins rapide. La courbe montre des bosses correspondant à des éléments ayant des nombres de protons ou de neutrons caractéristiques.
4. **Un petit groupe d'éléments légers très peu abondants** Il s'agit du Li, Be et B (facteur 10^8 - 10^{10} en dessous H, He)

Ces divers éléments ont des origines nucléosynthétiques différentes (voir cours de Structure interne, voir aussi cours de Cosmologie). On notera des maxima relatifs d'abondances pour les éléments présentant des énergies de liaison par nucléon élevées (cf Fig. 3.25)

- Les abondances solaires sont bien représentatives de celles des étoiles de Population I, ainsi que du milieu interstellaire dans le voisinage solaire.

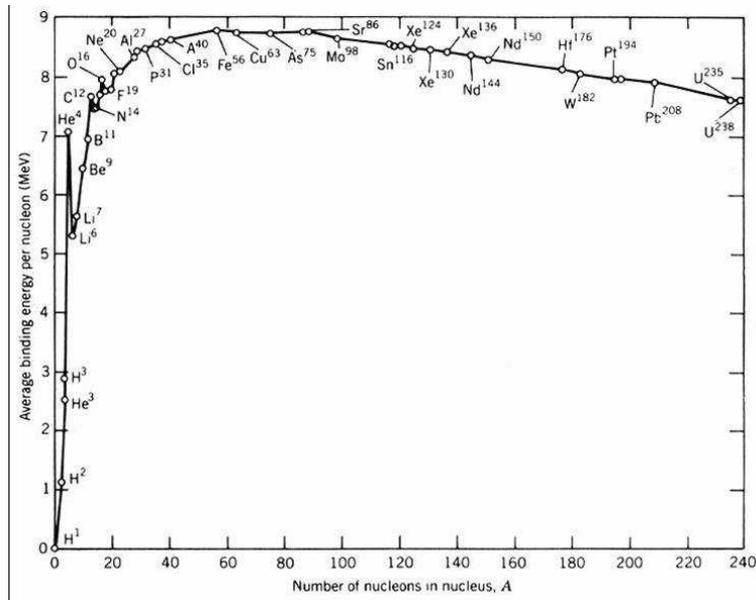


FIG. 3.25 – Energie de liaison par nucléon.

- Les abondances varient avec la distance galactocentrique, ainsi qu'avec l'âge des étoiles étudiées (voir cours sur l'Evolution dynamique et chimique des galaxies).

Remarque

Les étoiles gardent en surface les abondances du milieu interstellaire original. En effet, en général les abondances de surface ne sont pas affectées par les réactions nucléaires qui s'effectuent dans les régions centrales. (Exception : étoiles ayant des vents stellaires importants).

Abondances dans les étoiles de Population II

Les étoiles très vieilles, de Population II typiques, des amas globulaires ont des abondances en éléments lourds (c'est-à-dire autres que H et He), beaucoup plus faibles, p. ex. d'un facteur 100, c'est-à-dire

$$Z = 10^{-3}$$

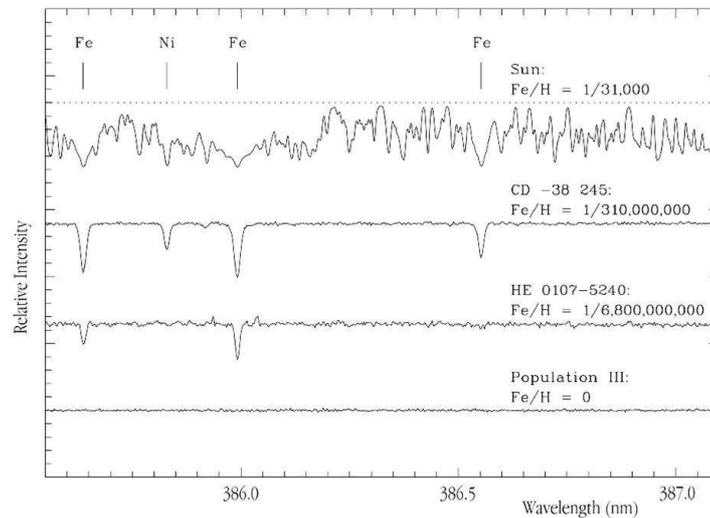
$$\text{ou } \left[\frac{Fe}{H} \right] = -2 \quad \text{avec } \left[\frac{Fe}{H} \right] = \log\left(\frac{Fe}{H}\right)_* - \log\left(\frac{Fe}{H}\right)_\odot$$

Un à deux pourcent des étoiles de Population II ont des déficiences d'un facteur 10^3 . La distribution des éléments reste en gros similaire à celle des abondances dans les étoiles de Pop I, avec toutefois des excès relatifs de

$$O/Fe, \quad Ne/Fe, \quad Mg/Fe, \quad Si/Fe, \quad S/Fe$$

c'est-à-dire des éléments multiples de α . ^{23}Na présente aussi souvent un excès relatif.

Les étoiles les plus déficientes en Fer connues à ce jour ont des abondances en éléments lourds environ $1/200\,000$ de l'abondance solaire ($[\frac{Fe}{H}] = -5.4$). Les spectres d'étoiles de différentes métallicité sont montrés à la Fig. 3.26



Spectra of Stars with Different Metal Content

ESO PR Photo 25b/02 (30 October 2002)

© European Southern Observatory



FIG. 3.26 – Spectres d'étoiles de différentes métallicité.

La galaxie bleue compacte Zw 18 a une valeur $Z \sim 1/50Z_{\odot}$ ($1/50 Z_{\odot}$). On ne connaît pas d'étoile avec $Z = 0$ (étoiles de Pop III).

3.10 Rappels d'électrodynamique (en lecture)

3.10.1 Moments d'une distribution de charges

Nous voulons calculer ici le champ électrique dû à une distribution de charges (voir Fig. 3.27). Soit r la distance de A à l'origine. Le potentiel en

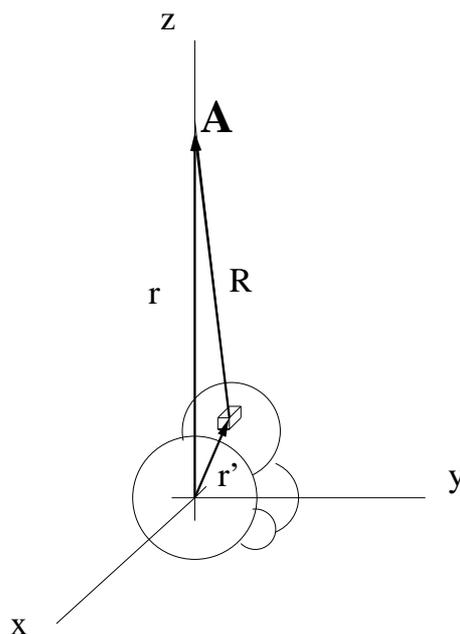


FIG. 3.27 –

A , V_A , est obtenu en ajoutant les contributions de tous les éléments de la distribution de charges,

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z')}{R} dv', \quad (3.89)$$

ρ étant la densité de charges. Nous pouvons exprimer R en fonction de r et de la distance r' de l'origine à l'élément de charge. En utilisant la loi des cosinus pour l'angle θ entre r' et l'axe sur lequel se trouve A , on trouve

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{1/2}. \quad (3.90)$$

L'intégrale devient alors

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho dv' [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2}. \quad (3.91)$$

Si A est très distant de la distribution de charges, r' est beaucoup plus petit que r pour toutes les parties de la distribution de charges.

QUESTION : *Montrer que si $r' \ll r$ le potentiel V_A peut s'écrire*

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots \right] \quad (3.92)$$

avec

$$K_0 = \int \rho dv', \quad K_1 = \int r' \cos \theta \rho dv', \quad K_2 = \int r'^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \rho dv'$$

Le coefficient K_0 est la charge totale de la distribution¹. Le terme K_1 mesure le déplacement relatif, dans la direction A , des charges positives par rapport aux charges négatives². Dans ce cas le potentiel le long de l'axe z variera asymptotiquement (*i.e.* avec une approximation d'autant meilleure que les distances sont plus grandes) comme $1/r^2$. Nous nous attendrons alors à ce que **l'intensité du champ électrique se comporte asymptotiquement comme $1/r^3$, en contraste avec la dépendance en $1/r^2$ pour le champ de la charge ponctuelle.**

Les quantités K_0, K_1, K_2, \dots sont reliées à ce que l'on appelle les *moments* de la distribution de charges, K_0 est le moment monopolaire ou intensité du monopole, K_1 est une composante du moment dipolaire de la distribution. Le moment dipolaire a les dimensions d'une charge multipliée par un déplacement, c'est un vecteur et K_1 est sa composante z , K_2 est relié au moment quadrupolaire de la distribution (le quadrupôle et les moments d'ordre supérieur sont des tenseurs).

Les moments permettent de mettre en avant les caractéristiques de la distribution de charges qui déterminent le champ à grande distance. **Pour comprendre ce qui se passe dans un diélectrique³, il se trouve que seules comptent l'intensité du monopôle (la charge totale) et l'intensité du dipôle des molécules qui forment la matière.**

¹Si la distribution de charges est neutre ($K_0 = 0$).

²La valeur de K_1 est indépendante de la position de l'origine.

³diélectrique, se dit d'une substance qui ne conduit pas le courant électrique.

3.10.2 Potentiel et champ d'un dipôle

Le potentiel à une distance r du dipôle, dans une direction donnée par le vecteur unité \mathbf{n} , est

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' \rho dv' = \frac{\mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \int \mathbf{r}' \rho dv'. \quad (3.93)$$

On définit le vecteur moment dipolaire \mathbf{p} par

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho dv'. \quad (3.94)$$

L'Eq. (3.93) peut alors s'écrire

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{r^2}. \quad (3.95)$$

En s'éloignant du dipôle dans n'importe quelle direction, nous trouvons que l'intensité du champ décroît comme $1/r^3$.

3.10.3 Champ électrique créé par la matière polarisée

Soit N le nombre de dipôles par unité de volume dans un matériau, et soit $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ le dipôle associé à un volume unité. Nous supposons que notre matériau a une charge globale nulle. Seules les dipôles sont responsables du champ à grande distance. Calculons le potentiel associé à un cylindre d'un tel matériau (cf Fig. 3.28). Un élément du cylindre, de hauteur dz a un moment dipolaire $\mathbf{P}dv = \mathbf{P}dadz$. On peut écrire sa contribution au potentiel au point A à l'aide de la formule (3.93) :

$$dV_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Pdadz \cos \theta}{r^2}. \quad (3.96)$$

QUESTION : *Montrer que*

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Pda \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (3.97)$$

On obtient une expression pour le potentiel qui est celui que produirait en A deux charges ponctuelles : une charge positive de grandeur Pda située au sommet de la colonne à une distance r_2 de A , et une charge négative de même grandeur située au bas de la colonne. La source qui est constituée par une

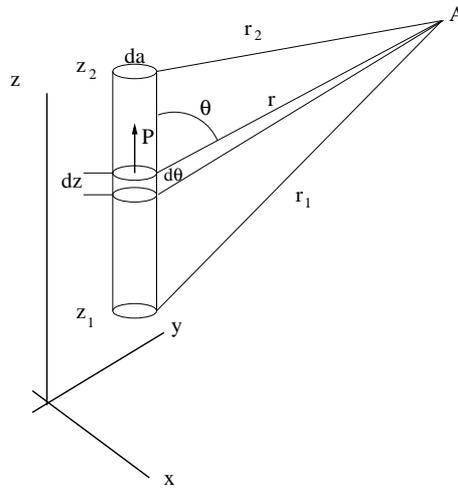


FIG. 3.28 –

colonne de matière uniformément polarisée est équivalente, tout au moins en ce qui concerne son champ électrique en tout point extérieur, à deux charges concentrées en ses extrémités.

Une plaque de forme quelconque uniformément polarisée peut être décomposée en un grand nombre de colonnes juxtaposées les unes aux autres. Nous en concluons que le potentiel partout **à l'extérieur** de la lame ou d'un cylindre uniformément polarisé est précisément celui qui résulterait de deux couches de charges superficielles situées là où se trouvent les surfaces supérieures et inférieures de la lame, avec une densité de charges superficielles constantes $\sigma = +P$ et $\sigma = -P$ respectivement.

Que vaut le champ à l'intérieur du diélectrique ?

Considérons une plaque de matière polarisée d'épaisseur h (cf Fig. 3.29). Les couches de charges montrées à la Fig. 3.29 donnent le même champ extérieur. L'intensité du champ à l'intérieur des deux couches de charges (loin des bords) est égal à σ/ϵ_0 et il pointe vers le bas. La différence de potentiel entre les points A' et B' est $\sigma h/\epsilon_0$ volts. La même différence de potentiel doit exister entre les points correspondants A et B de la lame polarisée, car le champ extérieur en entier est le même dans les deux systèmes. Le champ est-il aussi identique à l'intérieur ? Certainement pas, car la lame est pleine d'électrons et de noyaux positifs avec des champs de millions de volts par cm

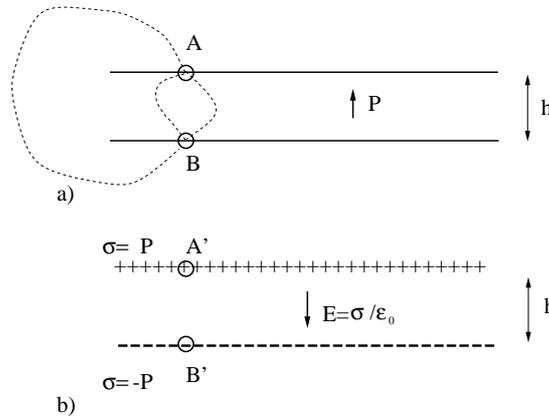


FIG. 3.29 –

pointant dans des directions quelconques. Par contre la circulation du champ $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, calculée sur tout trajet interne de A à B est égal à la circulation sur tout trajet externe. Or la circulation sur tout trajet externe est égale à $\sigma h / \epsilon_0$ ou Ph / ϵ_0 . Donc même si le champ à l'intérieur du diélectrique n'est pas égal à P / ϵ_0 , sa circulation est égale à celle que donnerait un champ constant de P / ϵ_0 .

Notons que le \mathbf{E} qui se trouve dans l'intégrale $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ permettant de calculer la différence de potentiel représente le champ électrique total en un point donné, il comprend les champs intenses et complexes dus aux noyaux et aux électrons. Quel que soit le chemin la différence de potentiel sera équivalente à celle due à un champ uniforme de valeur P / ϵ_0 . **Ceci nous dit que la moyenne spatiale du champ électrique dans la lame polarisée doit être $-P / \epsilon_0$.** Par moyenne spatiale on entend ici

$$\langle \mathbf{E} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E} dv. \quad (3.98)$$

3.10.4 Condensateur rempli d'un diélectrique

Le champ \mathbf{E} , entre les plaques du condensateur, dans le diélectrique, est la somme du champ \mathbf{E}_0 qui serait présent entre les plaques sans le diélectrique et du champ \mathbf{E}' induit,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 - \mathbf{P} / \epsilon_0. \quad (3.99)$$

Le vecteur \mathbf{P} est parallèle à \mathbf{E}_0 (le vecteur polarisation va de la charge négative à la charge positive). Le champ induit $\mathbf{E}' = -\mathbf{P}/\epsilon_0$.

On définit les quantités suivantes :

- **La susceptibilité électrique**, qui est une propriété intrinsèque du matériau diélectrique, est définie par $P = \chi_e E^4$. On introduit souvent une quantité χ_r telle que $\chi_e = \epsilon_0 \chi_r$.
- **La constante diélectrique** $\epsilon = \epsilon_0 + \chi_e = \epsilon_0(1 + \chi_r)$.
- **La constante diélectrique relative** $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = 1 + \chi_r$ (syst. MKSA). Dans le système de Gauss, on a $\epsilon_r = 1 + 4\pi\chi_r$ et $\epsilon_0 = 1$.

3.10.5 Champ d'une charge dans un milieu diélectrique et théorème de Gauss

Imaginons qu'on ait chargé une petite sphère métallique et qu'on l'ait fait tomber dans un récipient plein d'huile. Le champ électrique produit par la sphère chargée dans l'huile est $1/\epsilon_r$ fois le champ que la sphère produirait dans le vide

$$E = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}. \quad (3.100)$$

QUESTION : *Montrer la relation 3.100.*

L'intégrale de la quantité $\epsilon\mathbf{E}$ prise sur une certaine surface fermée S entourant Q est égal à Q (théorème de Gauss). Donc

$$\text{div}(\epsilon\mathbf{E}) = \rho_{\text{libre}}. \quad (3.101)$$

Maintenant on a toujours que (cf. lois de Maxwell ; voir les appendices à ce chapitre)

$$\text{div}(\epsilon_0\mathbf{E}) = \rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{liee}}. \quad (3.102)$$

Il résulte des équations (3.101) et (3.102) que

$$\text{div}((\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}) = -\rho_{\text{liee}}. \quad (3.103)$$

Comme $(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E} = \chi_e\mathbf{E} = \mathbf{P}$, l'équation ci-dessus implique que

$$\text{div}\mathbf{P} = -\rho_{\text{liee}} \quad (3.104)$$

⁴Le champ E est le champ total dans la matière.

Les équations (3.102) et (3.104) impliquent que

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{libre}}. \quad (3.105)$$

Cette relation est tout à fait indépendante de toute relation entre \mathbf{E} et \mathbf{P} . Elle n'est pas limitée aux matériaux, qu'on appelle diélectriques, dans lesquels \mathbf{P} est proportionnel à \mathbf{E} . On a l'habitude de donner à cette combinaison un nom spécial, celui de vecteur déplacement électrique ou induction électrique que l'on représente par le symbole \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (3.106)$$

Dans un diélectrique isotrope, \mathbf{D} est simplement $\epsilon \mathbf{E}$, mais la relation

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}}, \quad (3.107)$$

s'applique dans toute situation où l'on peut définir les quantités macroscopiques \mathbf{P} , \mathbf{E} et ρ .

Remarquons que l'équation (3.107) peut suggérer que la source de \mathbf{D} est la distribution de charges libres, dans le même sens que la distribution de charges totale est la source de \mathbf{E} . Cela n'est pas correct. Le champ \mathbf{E} est uniquement déterminé, à l'addition d'un champ constant près, par la distribution de charge ρ car, en plus de la loi $\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho/\epsilon_0$, il y a l'autre condition $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Il n'est pas vrai, en général, que $\operatorname{rot} \mathbf{D} = 0$. Ainsi la distribution de charge libre ne suffit pas pour déterminer \mathbf{D} au moyen de l'équation (3.107). On a besoin de quelque chose d'autre, telle que les conditions aux limites sur les surfaces des divers diélectriques.

Résumons les conclusions essentielles obtenues

1) La matière peut être polarisée, sa condition pouvant être complètement décrite, tout au moins en ce qui concerne le champ macroscopique, par une densité de polarisation \mathbf{P} , qui est le moment dipolaire par unité de volume. La contribution d'une telle substance au champ électrique \mathbf{E} est la même que celle d'une distribution de charges ρ_{liee} , existant dans le vide ayant la densité $\rho_{\text{liee}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$. En particulier, à la surface d'une substance polarisée, où \mathbf{P} est discontinu, cela se réduit à une densité de charges superficielles $\sigma = -P_n$, P_n étant la composante normale à la surface du vecteur polarisation (non démontré dans les notes ci-dessus). On ajoute alors toute distribution de charges libres qui peut être présente, et le champ électrique est le champ que produirait dans le vide cette distribution totale de charges. C'est le champ

macroscopique \mathbf{E} à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de la matière, étant bien entendu qu'à l'intérieur de la matière, il s'agit de la moyenne spatiale du vrai champ microscopique.

2) Si \mathbf{P} est proportionnel à \mathbf{E} dans une substance, on dit que c'est un diélectrique. Nous définissons la susceptibilité électrique χ_e et la constante diélectrique caractéristique de cette substance ϵ par respectivement $\chi_e = \mathbf{P}/\mathbf{E}$ et $\epsilon = \epsilon_0 + \chi_e$. Les charges libres immergées dans un diélectrique donnent lieu à des champs électriques qui sont ϵ_0/ϵ fois plus forts que ceux que ces mêmes charges produiraient dans le vide.

3.10.6 Vitesse de phase et de groupe

Considérons deux ondes f^- et f^+ ayant des fréquences $\omega - \Delta\omega$ et $\omega + \Delta\omega$,

$$f^- = A \cos[(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x], \quad (3.108)$$

$$f^+ = A \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x]. \quad (3.109)$$

La superposition de ces ondes donne

$$f = f^- + f^+ = A (\cos[(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x] + \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x]),$$

$$f = 2A \cos[\Delta\omega t - \Delta k x] \cos(\omega t - kx). \quad (3.110)$$

On peut interpréter le terme $\cos(\omega t - kx)$ comme décrivant la propagation d'une onde dont l'amplitude varie au cours du temps selon $\cos[\Delta\omega t - \Delta k x]$. La quantité

$$v = \omega/k, \quad (3.111)$$

est appelée vitesse de phase, alors que la vitesse de la modulation

$$u = \frac{\partial\omega}{\partial k}, \quad (3.112)$$

est appelée la vitesse de groupe. Cette dernière vitesse représente la vitesse à laquelle se transmet l'information.

Chapitre 4

Excitation, Ionisation et Propriétés Thermodynamiques des Gaz

4.1 Rappels de physique statistique

Soit un ensemble de N particules toutes identiques, sans interactions mutuelles, en équilibre statistique, avec l'hypothèse que l'énergie totale E et le nombre N se conservent. La distribution d'énergie du système, c.à.d. le nombre de particules N_r , ayant une énergie E_r , est donnée par

$$N_r = \frac{g_r}{e^{-\psi + \frac{E_r}{kT}} + \alpha} \quad \alpha = 0 \text{ ou } \pm 1 \quad (4.1)$$

g_r est le nombre de degrés de libertés internes ou d'états quantiques dans l'état d'énergie E_r . Suivant les hypothèses spécifiques, on a les diverses distributions suivantes.

Statistique de Boltzmann : $\alpha = 0$

1) Discernabilité¹. 2) Complexions, c.à.d. répartitions dans l'espace de phase, également probables. 3) L'état macroscopique est celui qui est réalisé par le

¹Le fait que les particules soient discernables est important pour le calcul du nombre de complexions. En effet considérons une boîte contenant N particules, le nombre de manières différentes (de complexions) de répartir ces particules entre deux moitiés de la boîte sera 2^N si les particules sont discernables. Pour $N = 2$ cela fait donc 4 complexions. Si les particules sont indiscernables, le nombre de complexions est 3.

plus grand nombre de complexions (maximum de l'entropie).

Statistique de Bose-Einstein : $\alpha = -1$

1) Principe d'incertitude. 2) Indiscernabilité. 3) Etats microscopiques également probables. 4) La probabilité d'un état macroscopique dépend du nombre d'états microscopiques qui peuvent le réaliser. La statistique de B.E. s'applique aux particules de spin entier ou nul (photons, mésons π , particules α ...).

Statistique de Fermi-Dirac : $\alpha = +1$

Mêmes hypothèses que pour B.E. avec en plus le principe d'exclusion. S'applique au cas des particules de spin demi-entier (électrons, positrons, protons, neutrons, neutrinos, mésons μ ...).

ψ qui est introduit comme un multiplicateur de Lagrange est souvent appelé paramètre de dégénérescence. Pour $\psi \ll -1$, $e^{-\psi}$ est très grand et les statistiques de B.E. et F.D. tendent vers celle de Boltzmann. C'est le cas des milieux peu denses. On note aussi que

$$\psi = \frac{\mu}{kT} \quad (4.2)$$

où μ est le potentiel chimique, qui est une grandeur intensive (cf. p. ex. Landau et Lifshitz, Physique Statistique). C'est une notion très utile pour l'étude des changements d'états (ionisation, neutronisation, équilibre entre neutrons, muons et hypérons dans les étoiles à neutrons, etc. ...).

Note sur les multiplicateurs de Lagrange

Considérons un exemple simple. Supposons que nous cherchions un extrêmu de la fonction $f(x, y)$. S'il n'y a pas de conditions supplémentaires, nous devons résoudre les deux équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (4.3)$$

simultanément. La paire résultante de valeurs x_0, y_0 spécifie les coordonnées auxquels f a un extrêmu. Supposons maintenant que nous désirions chercher le maximum de $f(x, y)$ le long d'une courbe donnée par la condition auxiliaire $y = y_a(x)$. Il peut y avoir un ou plusieurs points le long de cette courbe où $f(x, y)$ a un maximum ou minimum. Pour obtenir la position du

point (x_1, y_1) , extrémum de $f(x, y)$ le long de la courbe donnée par la condition auxiliaire, on cherche la valeur de x tel que

$$\frac{d}{dx}f(x, y_a(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy_a(x)}{dx} = 0. \quad (4.4)$$

La position du maximum est la solution x_1 de cette équation, la coordonnée y est donnée par $y_1 = y_a(x_1)$. Il est possible de trouver (x_1, y_1) d'une autre manière. Supposons que l'équation auxiliaire est $g(x, y) = 0$ ². Introduisons une troisième inconnue, λ , et cherchons un extrémum de la nouvelle fonction $f + \lambda g$ avec comme condition auxiliaire que $g = 0$. En d'autres termes nous devons résoudre les trois équations suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad (4.6)$$

$$g = 0, \quad (4.7)$$

simultanément afin de déterminer les valeurs de x , y et λ .

QUESTION : *Montrer que les trois équations ci-dessus sont équivalentes à l'Eq. 4.4.*

Lorsque l'on détermine la distribution la plus probable, le potentiel chimique est introduit comme un multiplicateur de Lagrange utilisé pour contraindre la distribution recherchée à avoir un nombre donné de particules. Ainsi il est naturel que le potentiel chimique ait une connection profonde avec les processus, tels que les réactions nucléaires ou chimiques, qui changent le nombre de particules et avec les lois de conservation. La température, qui a une signification plus évidente, est introduite comme un multiplicateur de Lagrange utilisé afin de contraindre la distribution à avoir une énergie totale donnée.

Equilibre thermodynamique

Un système thermodynamique formé d'une seule sorte de constituants est défini par deux des variables P, T, V . Cependant souvent le milieu peut

²Dans l'exemple vu plus haut $g(x, y) = y - y_a(x) = 0$.

contenir plusieurs types de constituants i en nombres N_i . Lors d'un changement de conditions (p.ex. T), les proportions des divers constituants peuvent changer. C'est le cas dans des réactions chimiques ou nucléaires, lors de changements d'état, tels l'ionisation, la neutronisation ou la cristallisation. Dans un tel système, U n'est plus fonction de S et V seulement, mais

$$U = U(S, V, N_i) \quad (4.8)$$

d'où

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, N} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, N} dV + \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial N_i}\right)_{S, V} dN_i \quad (4.9)$$

L'indice N implique que tous les N_i sont constants. Le potentiel chimique des particules i est donné par

$$\mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial N_i}\right)_{S, V} \quad (4.10)$$

On définit l'équilibre thermique : T a atteint une valeur d'équilibre. Equilibre thermodynamique : équilibre thermique et équilibre "chimique". La condition d'équilibre chimique est que de petits changements de N_i ne produisent pas de variations des fonctions thermodynamiques, c.à.d.

$$\sum_i \mu_i dN_i = 0 \quad (4.11)$$

Par exemple, en l'absence de réactions, les dN_i sont indépendants, et pour chaque constituant on a

$$\mu_i dN_i = 0 \quad (4.12)$$

Les μ_i étant différents de 0, on a donc $dN_i = 0$. Pour les photons, leur nombre exact n'est pas fixé (à cause des interactions avec la matière), donc $dN_i \neq 0$ et l'équilibre demande $\mu_i = 0$.

Réactions avec changement d'état ou de phase :

Considérons une réaction, écrite de manière générale

$$\sum_i \nu_i A_i = 0, \quad (4.13)$$

avec A_i le symbole de l'élément i , et ν_i le coefficient stoechiométrique.

Exemple : ionisation



$$\nu_H^+ = 1, \quad \nu_e = 1, \quad \nu_H = -1 \quad (4.15)$$

Chaque fois que par exemple ν_1 particule 1 sont détruites ou synthétisées, ν_i particules i apparaissent ou disparaissent. Cela signifie que la variation en nombre des particules 1 est reliée à la variation en nombre des particules i par la relation

$$dN_i = \frac{\nu_i}{\nu_1} dN_1 \quad (4.16)$$

Considérons un changement arbitraire, par exemple dN_1 . La condition d'équilibre "chimique" devient

$$\sum_i \mu_i dN_i = \frac{dN_1}{\nu_1} \sum_i \nu_i \mu_i = 0 \quad (4.17)$$

dN_1 étant arbitraire, on a donc

$$\sum_i \nu_i \mu_i = 0 \quad (4.18)$$

Puisque $\psi = \mu_i / kT$, la condition d'équilibre chimique implique aussi

$$\sum_i \nu_i \psi_i = 0 \quad (4.19)$$

La somme des produits des paramètres de dégénérescence et des facteurs stoechiométriques est nulle.

Remarque :

Il convient de s'assurer que la loi de Maxwell-Boltzmann pour la distribution des vitesses est connue. On obtient notamment pour le nombre relatif de particules ayant une énergie dans l'intervalle E , $E + dE$.

$$\frac{dn(E)}{n} = \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-E/kT} E^{1/2} dE \quad (4.20)$$

avec

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (4.21)$$

Le nombre relatif de particules ayant une vitesse selon l'axe x comprise entre v_x et $v_x + dv_x$ est donné par

$$\frac{dn_x}{n} = \frac{m^{1/2}}{(2\pi kT)^{1/2}} e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}} dv_x \quad (4.22)$$

4.2 Gaz et atomes excités

Considérons un ensemble N d'atomes avec des états d'énergie E_n, E'_n . Nous allons nous intéresser aux nombres d'atomes dans les états d'énergie $n, n' \dots$ en fonction de T . Ces nombres sont essentiels pour la détermination des intensités relatives des raies spectrales dont l'analyse fournit de nombreuses informations astrophysiques (voir chapitre 2 et 3). Considérons une situation d'équilibre, pour des particules non dégénérées, avec $\psi \ll -1$. Le nombre d'atomes dans le niveau n (c'est-à-dire ayant un électron extérieur dans le niveau n) est

$$N_n = g_n e^\psi e^{-E_n/kT}, \quad (4.23)$$

où g_n est le poids statistique du niveau n . Le peuplement relatif des deux niveaux n et n' est

$$\frac{N_{n'}}{N_n} = \frac{g_{n'}}{g_n} e^{-(E_{n'} - E_n)/kT}. \quad (4.24)$$

Le nombre total N est $N = \sum_n N_n$ avec

$$\frac{N_n}{N_1} = \frac{g_n}{g_1} e^{-E_{n,1}/kT} \quad E_{n,1} = E_n - E_1 \quad (4.25)$$

on a

$$N = N_1 \sum_n \frac{N_n}{N_1} = \frac{N_1}{g_1} \underbrace{\sum_n g_n e^{-E_{n,1}/kT}}_{u(T)}. \quad (4.26)$$

$u(T)$ est la fonction de partition ; elle peut être vue comme le poids statistique de l'ensemble des atomes sous les conditions considérées.

$$\frac{N_n}{N} = \frac{N_n}{N_1} \frac{N_1}{N} = \frac{g_n}{u(T)} e^{-(E_n - E_1)/kT} \quad (4.27)$$

Cette expression donne la fraction du nombre total d'atomes dans l'état n .

Remarque :

On note que $u(T)$ tend vers l'infini, car $n \rightarrow \infty$ et $\max(E_{n,1})$ reste fini. Cependant, les interactions entre ions abaissent le niveau du continuum et limitent le développement en série. De fait, dans le calcul de $u(T)$, on peut souvent se limiter aux premiers termes. Les quantités g_n , E_n , $u(T)$ sont tabulées.

Cas de l'hydrogène

Chaque état d'excitation de l'atome d' H est décrit par trois termes quantiques n , L , S . $L = n - 1, n - 2, \dots, 0$ et pour chaque valeur de L il y a $2L + 1$ états. Par exemple : prenons $n = 3$, on a $L = 2, 1, 0$.

$$\left. \begin{array}{ll} L = 0 & 2L + 1 = 1 \\ L = 1 & 2L + 1 = 3 \\ L = 2 & 2L + 1 = 5 \end{array} \right\} 9 \quad (4.28)$$

Pour chacun de ces états, on a $2S + 1$ états de spin, c'est-à-dire 2.

Le poids statistique g_n est

$$g_n = 2 \sum_{K=1}^n \left(\underbrace{2(n-K)+1}_L \right) = 2n^2 \quad (4.29)$$

QUESTION : *A démontrer par récurrence.*

L'énergie d'un niveau est $E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$

$$E_{n,1} = E_n - E_1 = -\frac{13.6}{n^2} + 13.6 = 13.6 \frac{n^2 - 1}{n^2} \quad (4.30)$$

$$u(T) \cong g_1 e^{-E_{1,1}/kT} \simeq 2 \quad (4.31)$$

$$\frac{N_n}{N} = n^2 e^{-\frac{13.6}{kT} \frac{n^2-1}{n^2}} \quad (4.32)$$

avec

$$\begin{aligned} k &= 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{deg}^{-1} \\ &= 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{deg}^{-1} \end{aligned}$$

On aura par exemple pour N_2/N , rapport du nombre d'atomes dans le niveau 2 au nombre total

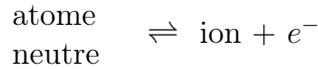
$$\begin{array}{rcl}
 T & = & 5 \cdot 10^3 K \\
 & & 1 \cdot 10^4 K \\
 & & 2 \cdot 10^4 K
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 N_2/N & = & 2.1 \cdot 10^{-10} \\
 & & 2.9 \cdot 10^{-5} \\
 & & 1.08 \cdot 10^{-2}
 \end{array}
 \quad (4.33)$$

Le peuplement des niveaux supérieurs croît rapidement avec T .

4.3 Ionisation des gaz

Dans le processus d'ionisation, un électron lié sur un des niveaux d'énergie est éjecté dans un état non lié. L'ionisation devient importante lorsque kT est du même ordre que le potentiel d'ionisation I , (exemple : $I_H = 13.6 \text{ eV}$, $T \simeq 10^5 K$).

Le continu commence à une énergie I_0 (potentiel d'ionisation) au-dessus du niveau fondamental. Chaque élément a une série de valeurs I_0 correspondant aux états d'ionisation successifs. La formule de Saha exprime les concentrations relatives d'atomes dans des états d'ionisation successifs. Elle se dérive par une extension de la formule de Boltzmann appliquée à la réaction



Soit n_{00} , n_{01} et n_e les concentrations des atomes neutres, des ions et des électrons. Le premier indice indique le niveau d'excitation (0 pour le fondamental), le second, le degré d'ionisation.

Le poids statistique g_e de l'électron de vitesse u (dans le continu) dans le volume dV est

$$\begin{aligned}
 g_e &= 2 \frac{d^3 p d^3 q}{h^3} = (\text{fact. spin}) \frac{\text{él. de vol. en phase}}{\text{dim. d'une cellule}} \\
 &= \frac{2 dV 4\pi p^2 dp}{h^3}
 \end{aligned}$$

Le poids statistique du système ion + électron est

$$g_e \cdot g_{01} \quad (4.34)$$

Dans son état ionisé, le système a, relativement au niveau fondamental l'énergie

$$E = I_0 + \frac{p^2}{2m_e}, \quad (4.35)$$

où $p = m_e u$ est l'impulsion de l'électron. On avait la loi de Boltzmann

$$\frac{N_m}{N_c} = \frac{g_m}{g_c} e^{-(E_m - E_c)/kT}. \quad (4.36)$$

Appliquée à la réaction d'ionisation, elle donne

$$\frac{n_{01}}{n_{00}} = \frac{g_{01} \cdot g_e}{g_{00}} e^{-\left(I_0 + \frac{p^2}{2m_e}\right)/kT} \quad (4.37)$$

Remarque :

Dans le deuxième membre, nous devrions en fait avoir aussi $(e^{\psi_{01} + \psi_e} / e^{\psi_{00}})$. La relation $\sum_i \nu_i \psi_i = 0$ implique

$$\psi_{01} + \psi_e - \psi_{00} = 0 \quad (4.38)$$

ce qui fait que le terme en ψ vaut 1.

Dans le processus d'ionisation d'un atome (ou d'un ion), il n'y a qu'un électron éjecté. Le nombre d'état quantique que peut occuper cet électron est

$$2 \frac{dV 4\pi p^2 dp}{h^3}, \quad (4.39)$$

avec dV le volume occupé par un électron. Cette quantité peut être exprimée en fonction de n_e , $dV = 1/n_e$. On obtient donc

$$\frac{n_{01}}{n_{00}} = \frac{1}{n_e} \frac{g_{01}}{g_{00}} \frac{8\pi}{h^3} e^{-\left(I_0 + \frac{p^2}{2m_e}\right)/kT} p^2 dp \quad (4.40)$$

Il faut sommer sur tous les états finaux, en intégrant sur toutes les vitesses de l'électron.

$$\int_0^\infty e^{\frac{-p^2}{2m_e kT}} p^2 dp = \frac{\sqrt{\pi}}{4} (2m_e kT)^{3/2} \quad (4.41)$$

En effet,

$$\int_0^\infty t^2 e^{-at^2} dt = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (4.42)$$

(cf. par exemple *Abramovitz & Stegun Handbook of mathematical functions*, Dover Publ.).

On obtient alors

$$\frac{n_{01} n_e}{n_{00}} = \frac{g_{01}}{g_{00}} 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-I_0/kT} \quad (4.43)$$

Autres degrés d'ionisation et d'excitation

L'expression ci-dessus peut être généralisée pour n'importe quels états successifs d'ionisation.

$$\frac{n_{0j+1} n_e}{n_{0j}} = \frac{g_{0j+1}}{g_{0j}} 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-I_j/kT} \quad (4.44)$$

I_j : potentiel d'ionisation de l'état j à $j + 1$.

Soit E_{ij} l'énergie d'excitation du niveau i de l'ion j fois ionisé, relativement au niveau fondamental du ion.

$(I_j - E_{ij})$: potentiel de ionisation depuis le niveau i, j jusqu'au niveau fondamental de l'état d'ionisation $j + 1$

D'après Boltzmann, on a

$$\frac{n_{ij}}{n_{0j}} = \frac{g_{ij}}{g_{0j}} e^{-E_{ij}/kT} \quad (4.45)$$

$$\frac{n_{0j+1} n_e}{n_{ij}} = \frac{n_{0j+1} n_{0j}}{n_{0j} n_{ij}} n_e = \frac{g_{0j+1}}{g_{ij}} 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\left(\frac{I_j - E_{ij}}{kT}\right)} \quad (4.46)$$

Formule dite de Saha-Boltzmann

On peut aussi chercher l'expression donnant le rapport n_{j+1} / n_j des atomes $j + 1$ fois ionisés aux atomes j fois ionisés, quel que soit l'état d'excitation.

On a

$$\frac{n_i}{n} = \frac{g_i}{u(T)} e^{-E_i/kT} \quad (4.47)$$

qui devient pour l'état ij

$$\frac{n_{ij}}{n_j} = \frac{g_{ij}}{u_j} e^{-E_{ij}/kT} \quad (4.48)$$

et pour l'état $0\ j + 1$

$$\frac{n_{0j+1}}{n_{j+1}} = \frac{g_{0j+1}}{u_{j+1}} \quad (4.49)$$

En remplaçant, on trouve l'expression cherchée

$$\frac{n_{j+1} n_e}{n_j} = \frac{n_{ij} n_{j+1}}{n_j n_{ij}} n_e = \frac{n_{ij} n_{0j+1}}{n_j n_{ij}} n_e \frac{n_{j+1}}{n_{0j+1}} = \frac{u_{j+1}}{u_j} 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-I_j/kT} \quad (4.50)$$

Remarques :

1) A la place de n_e , on utilise parfois la pression électronique P_e

$$P_e = n_e kT \quad (4.51)$$

$$\frac{n_{j+1}}{n_j} = 2 \frac{u_{j+1}}{u_j} \left(\frac{2\pi m_e}{h^2} \right)^{3/2} \frac{(kT)^{5/2}}{P_e} e^{-I_j/kT} \quad (4.52)$$

L'ionisation est favorisée par : $T \nearrow$ ou $P_e \searrow$. Ainsi, à T égales, les éléments sont davantage ionisés dans les étoiles supergéantes que dans les naines. Les éléments de bas potentiels de ionisation sont évidemment ionisés en premier.

2) Les diverses quantités atomiques sont tabulées. Voir p. ex. *Corliss and Bozman* (1962), Nat. Bur. Std. US Monography no. 53; *Allen* (1973), *Astrophysical Quantities*; *Drawin H.W. and Felenbok P.* (...). Data for plasmas in Local Thermodynamic Equilibrium. Voir Figs. 4.1 et 4.2 des tables donnant les potentiels d'ionisation, les fonctions de partition et les poids statistiques (cf. Allen, 1973)

Explications :

Y indique le degré d'ionisation. U est la fonction de partition. g_0 est le poids statistique du niveau fondamental. Θ mesure la température

$$\Theta = \frac{5040 K}{T} \quad (4.53)$$

L'examen de la table des potentiels d'ionisation nous montre que :

pour	He, Ne	: $I > 20$ eV
	$H, C, N, O \dots$: I entre 10 et 20 eV
	Na, Mg, Al, K, Ca, Si	: I entre 4 et 8 eV

		Ionization potentials													
Atom	Stage of ionization														
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	
	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	eV	
1 H	13.598														
2 He	24.587	54.416													
3 Li	5.392	75.638	122.451												
4 Be	9.322	18.211	153.893	217.713											
5 B	8.298	25.155	37.930	259.366	340.22										
6 C	11.260	24.383	47.887	64.492	392.08	489.98									
7 N	14.534	29.601	47.448	77.472	97.89	552.06	667.03								
8 O	13.618	35.117	54.934	77.413	113.90	138.12	739.32	871.39							
9 F	17.422	34.970	62.707	87.138	114.24	157.16	185.18	953.89	1103.1						
10 Ne	21.564	40.962	63.45	97.11	126.21	157.93	207.26	239.09	1105.8	1362.2					
11 Na	5.139	47.286	71.64	98.91	138.40	172.15	208.48	264.19	299.9	1465.1	1648.7				
12 Mg	7.646	15.035	80.143	109.31	141.27	186.61	224.95	265.92	328.0	367.5	1761.8	1963			
13 Al	5.986	18.826	26.448	119.99	153.75	190.47	241.44	284.59	330.2	398.6	442.0	2086	2304		
14 Si	8.151	16.345	33.492	45.141	166.77	205.08	246.49	303.16	351.1	401.4	476.1	523	2438	2673	
15 P	10.486	19.725	30.18	51.42	65.02	220.45	263.28	309.37	371.7	424.4	479.5	561	612	2817	
16 S	10.360	23.33	34.83	47.30	72.68	88.05	280.01	328.33	379.1	447.1	504.7	565	652	707	
17 Cl	12.967	23.81	39.61	53.46	67.7	97.03	114.19	348.37	400.4	455.6	520.3	592	657	750	
18 Ar	15.759	27.629	40.74	59.51	75.04	91.01	124.4	143.45	422.6	478.9	539.0	618	686	756	
19 K	4.341	31.63	45.72	60.92	82.66	99.9	117.7	154.98	175.8	503.6	564.4	629	714	787	
20 Ca	6.113	11.871	50.91	67.15	84.43	108.78	127.7	147.4	188.7	211.3	591.6	657	726	817	
21 Sc	6.54	12.80	24.76	73.7	91.7	111.1	138.0	158.7	180.2	225.4	249.8	686	756	830	
22 Ti	6.82	13.58	27.49	43.26	99.4	119.36	140.8	169.4	193.0	216.2	265.3	292	788	862	
23 V	6.74	14.65	29.31	46.71	65.23	128.6	150.3	173.6	205.8	230.5	255.1	308	336	896	
24 Cr	6.766	16.50	30.96	49.1	70.2	90.57	161.1	184.6	209.3	244.4	270.7	298	355	384	
25 Mn	7.435	15.640	33.67	51.4	73.0	97	119.27	196.47	221.8	248.3	286.0	314	344	404	
26 Fe	7.870	16.16	30.651	54.8	75.5	100	128.3	151.12	235.0	262.1	290.4	331	361	392	
27 Co	7.86	17.06	33.50	51.3	79.5	103	131	160	186.2	276.2	305	336	379	411	
28 Ni	7.635	18.168	35.17	54.9	75.5	108	134	164	193	224.0	321	352	384	430	
29 Cu	7.726	20.292	36.83	55.2	79.9	103	139	167	199	232	266	369	401	435	
30 Zn	9.394	17.664	39.72	59.4	82.6	108	136	175	203	238	274	311	412	454	

Les diverses quantités atomiques sont tabulées. Voir p. ex. *Corliss and Bozman* (1962), *Nat. Bur. Std. US Monography no. 53*; *Allen* (1973), *Astrophysical Quantities*; *Drawin H. W. and Felenbok P.* (....). Data for plasmas in Local Thermodynamic Equilibrium.

FIG. 4.1 – Potentiels d'ionisation.

Ce sont ces derniers éléments, facilement ionisables, qui sont les principaux pourvoyeurs d'électrons libres à des T intermédiaires (cf. Soleil). Ces éléments influencent donc l'ionisation de l' H et sont donc importants pour la structure de l'atmosphère.

Exemples :

Cas de H

Evaluons le rapport n_{20} / n_{tot} des nombres d'atomes absorbant dans la série de Balmer au nombre total d'atomes neutres et ionisés.

$$\frac{n_{20}}{n_{tot}} = \frac{n_{20}}{n_0 + n_1} = \frac{n_{20}/n_0}{1 + \frac{n_1}{n_0}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Boltzmann} \\ \text{Saha} \end{array} \quad (4.54)$$

L'intensité des raies de la Série de Balmer passe par un maximum vers 10^4K

Fonctions de partition et poids statistiques (cf. Allen, 1973)

Partition function [1, 2, 3]									
Element	Y = I <i>NEUTRE</i>			Y = II <i>IONISE</i>			Y = III <i>EX</i>		
	g_0	log U		g_0	log U		g_0	log U	
		$\Theta = 1.0$	$\Theta = 0.5$		$\Theta = 1.0$	$\Theta = 0.5$		$\Theta = 1.0$	$\Theta = 0.5$
1 H	2	0.30	0.30	1	0.00	0.00	—	—	—
2 He	1	0.00	0.00	2	0.30	0.30	1	—	—
3 Li	2	0.32	0.49	1	0.00	0.00	2	—	—
4 Be	1	0.01	0.13	2	0.30	0.30	1	—	—
5 B	6	0.78	0.78	1	0.00	0.00	2	—	—
6 C	9	0.97	1.00	6	0.78	0.78	1	—	—
7 N	4	0.61	0.66	9	0.95	0.97	6	—	—
8 O	9	0.94	0.97	4	0.60	0.61	9	—	—
9 F	6	0.75	0.77	9	0.92	0.94	4	—	—
10 Ne	1	0.00	0.00	6	0.73	0.75	9	—	—
11 Na	2	0.31	0.60	1	0.00	0.00	6	—	—
12 Mg	1	0.01	0.15	2	0.31	0.31	1	—	—
13 Al	6	0.77	0.81	1	0.00	0.01	2	—	—
14 Si	9	0.98	1.04	6	0.76	0.77	1	—	—
15 P	4	0.65	0.79	9	0.91	0.94	6	—	—
16 S	9	0.91	0.94	4	0.62	0.72	9	—	—
17 Cl	6	0.72	0.75	9	0.89	0.92	4	—	—
18 Ar	1	0.00	0.00	6	0.69	0.71	9	—	—
19 K	2	0.34	0.60	1	0.00	0.00	6	—	—
20 Ca	1	0.07	0.55	2	0.34	0.54	1	—	—
21 Sc	10	1.08	1.49	15	1.36	1.52	10	—	—
22 Ti	21	1.48	1.88	28	1.75	1.92	21	—	—
23 V	28	1.62	2.03	25	1.64	1.89	28	—	—
24 Cr	7	1.02	1.51	6	0.86	1.22	25	—	—
25 Mn	6	0.81	1.16	7	0.89	1.13	6	—	—
26 Fe	25	1.43	1.74	30	1.63	1.80	25	—	—
27 Co	28	1.52	1.76	21	1.46	1.66	28	—	—
28 Ni	21	1.47	1.60	10	1.02	1.28	21	—	—
29 Cu	2	0.36	0.58	1	0.01	0.18	10	—	—
30 Zn	1	0.00	0.03	2	0.30	0.30	1	—	—
31 Ga	6	0.73	0.77	1	0.00	0.00	2	—	—
32 Ge	9	0.91	1.01	6	0.64	0.70	1	—	—
34 Se	9	0.83	0.89	4	—	—	9	—	—
36 Kr	1	0.00	0.00	6	0.62	0.66	9	—	—
37 Rb	2	0.36	0.7	1	0.00	0.00	6	—	—
38 Sr	1	0.10	0.70	2	0.34	0.53	1	—	—
39 Y	10	1.08	1.50	1+15	1.18	1.41	10	—	—
40 Zr	21	1.53	1.99	28	1.66	1.91	21	—	—
48 Cd	1	0.00	0.02	2	0.30	0.30	1	—	—
50 Sn	9	0.73	0.88	6	0.52	0.61	1	—	—
56 Ba	1	0.56	0.92	2	0.62	0.85	1	—	—
57 La	10	1.41	1.85	21	1.47	1.71	10	—	—
70 Yb	1	0.02	0.21	2	0.30	0.31	—	—	—
82 Pb	9	0.26	0.54	6	0.32	0.40	1	—	—

FIG. 4.2 – Fonction de partition.

(Figs. 4.3 et 4.4).

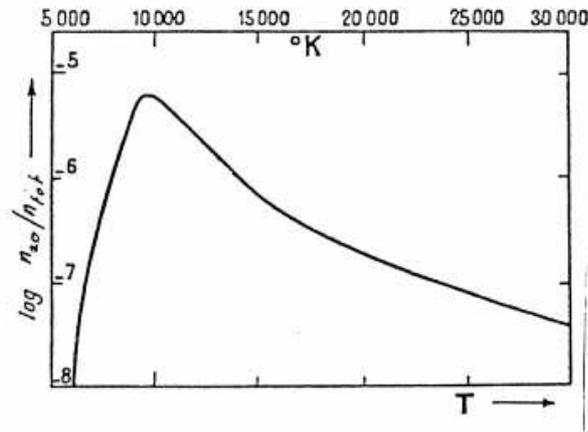
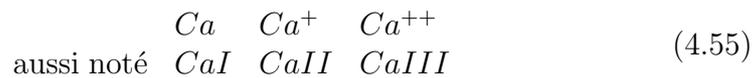


FIG. 4.3 – fraction du nombre d'atome d'hydrogène avec un électron dans le niveau d'excitation 2.

Cas du Ca

On peut avoir plusieurs états d'ionisation simultanément.

Exemple :



$$\frac{n_0}{n_{tot}} = \frac{1}{1 + \frac{n_1}{n_0} + \frac{n_2}{n_0}} \quad \text{mêmes types d'expressions pour} \quad \frac{n_1}{n_{tot}} \text{ et } \frac{n_2}{n_{tot}}$$

Ions négatifs

Un atome neutre peut, dans certains cas, former un ion négatif par capture d'un électron supplémentaire. Un cas important en astrophysique est



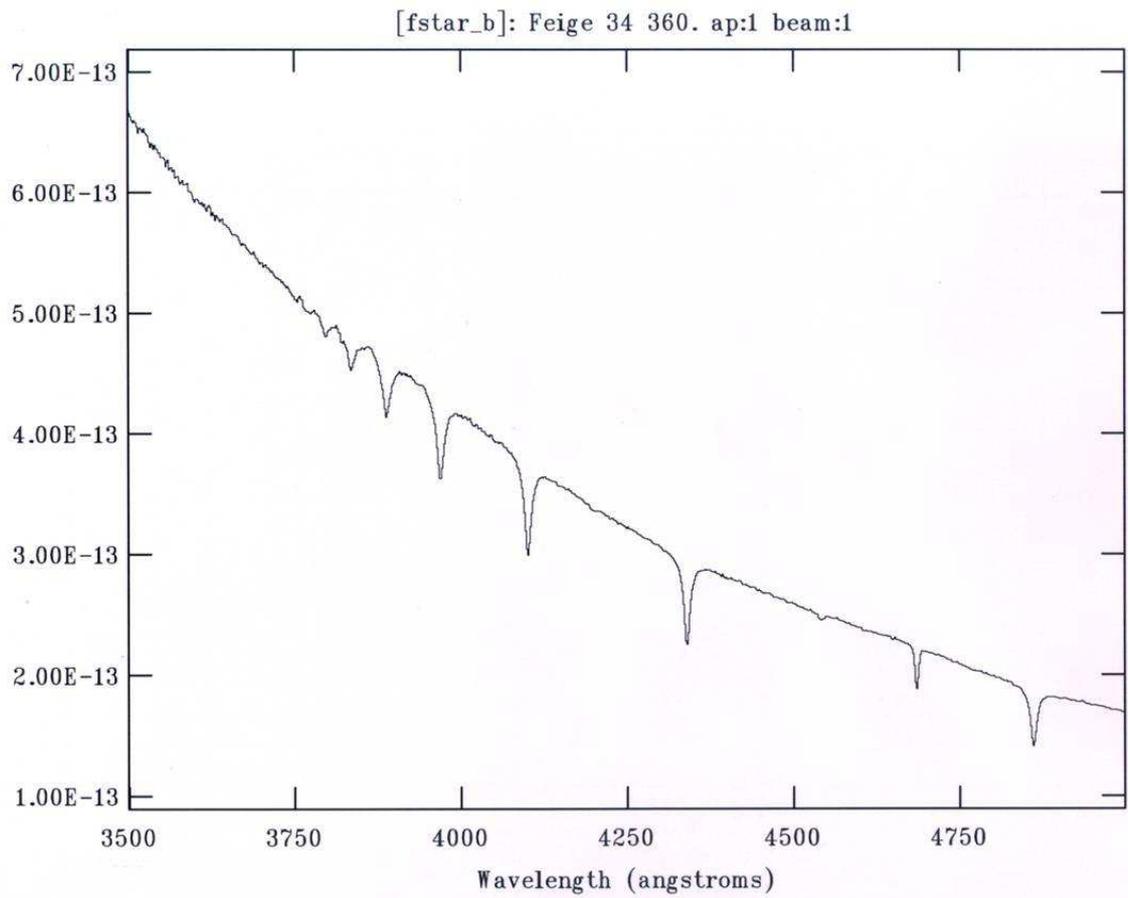


FIG. 4.4 – Spectre d'une étoile. Les raies de Balmer sont bien visibles. Sauriez-vous les identifier ?

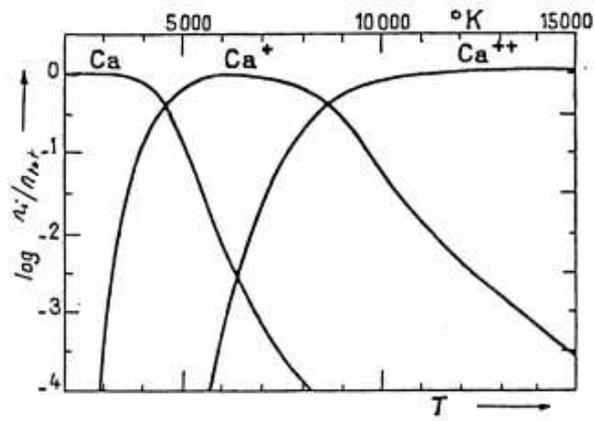


FIG. 4.5 – *Etat d'ionisation du calcium à différentes températures.*

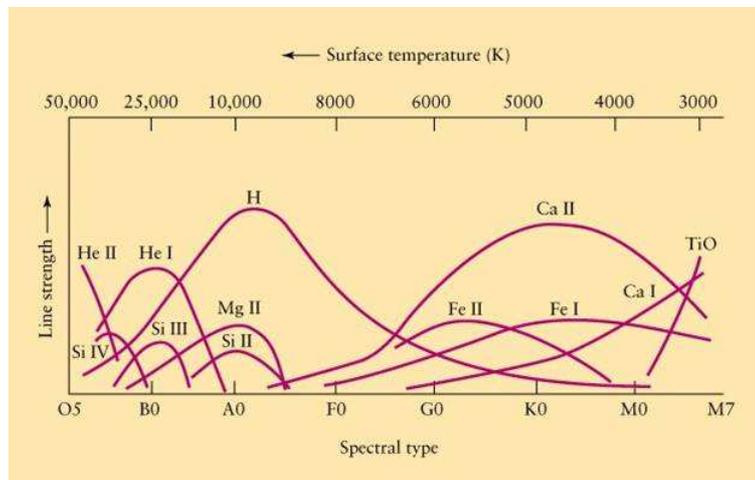


FIG. 4.6 – *Force des raies spectrales selon le type spectral.*

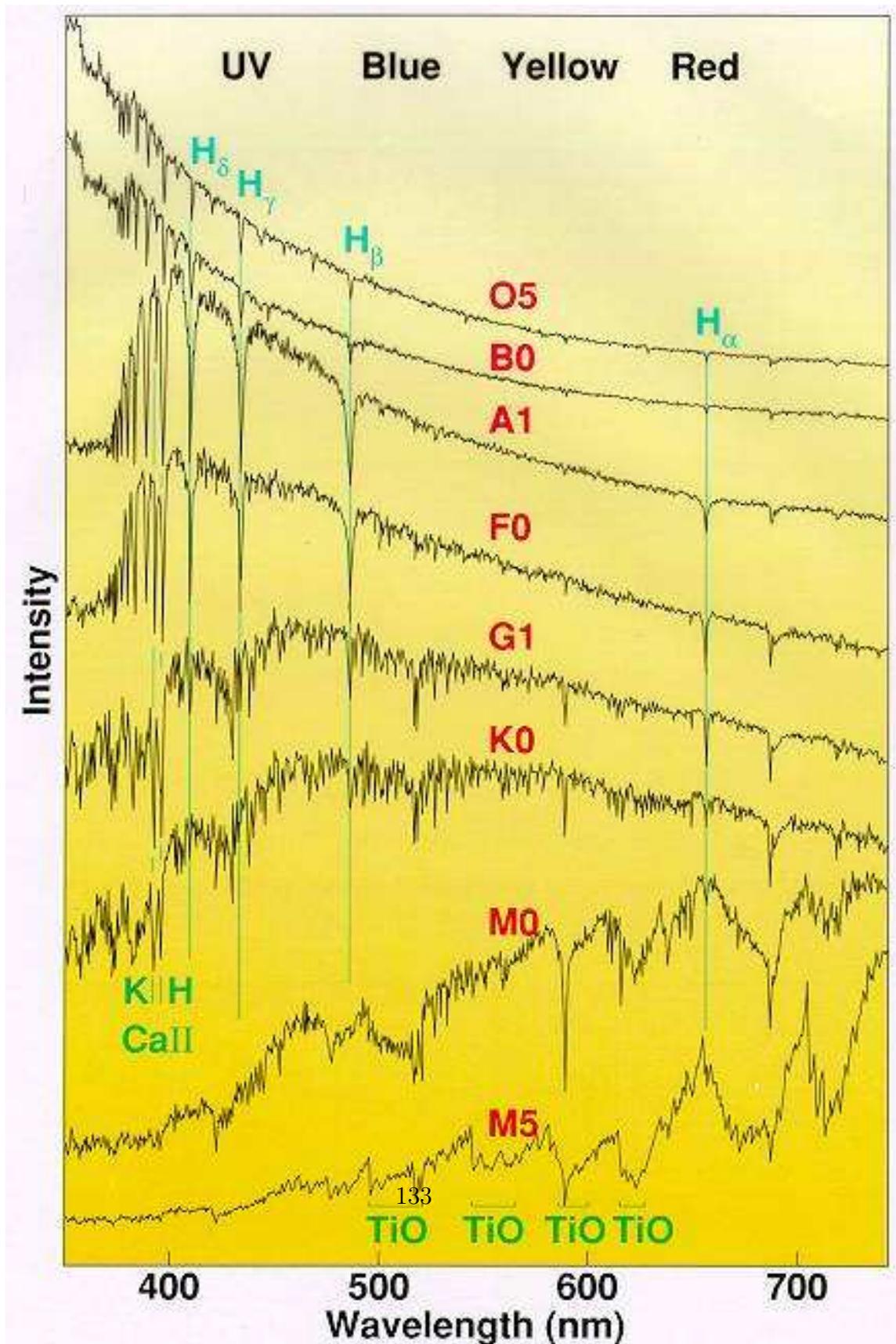


FIG. 4.7 – Spectres représentatifs des différents types spectraux.

Le noyau d' H n'est pas complètement protégé par un électron lié et il peut s'associer un deuxième électron. L'ion H^- contribue beaucoup à l'opacité des couches extérieures du Soleil (pour $\lambda < 16550 \text{ \AA}$). Le maximum d'absorption est situé vers 8000 \AA . L'équation de Saha fournit le rapport

$$\frac{n_H}{n_{H^-}} P_e = \left(\frac{2\pi m_e}{h^2} \right)^{3/2} (kT)^{5/2} 2 \cdot \frac{2}{1} e^{-\frac{0.747 \text{ eV}}{kT}} \quad (4.57)$$

L'énergie de liaison de l'électron supplémentaire est faible : 0.747 eV . Il existe d'autres possibilités d'ions négatifs, p. ex. C^- , O^- ; en astrophysique, seul H^- joue un rôle important. L'effet sur la santé des ions négatifs de l'atmosphère terrestre a parfois été évoqué.

4.4 Poids moléculaire et pression des milieux neutres, partiellement ou complètement ionisés.

Le degré d'ionisation influence le poids moléculaire moyen μ : masse en unité atomique par particule libre. μ intervient notamment dans l'équation d'état $P(\rho, T, \text{composition})$, p.ex. pour le gaz parfait $P = (k/\mu m_H) \rho T$. La concentration n de particules et leur densité ρ sont liées par

$$n = \frac{\rho}{\mu m_H} \quad (4.58)$$

m_H : masse de l'atome d'hydrogène.

Considérons un milieu constitué de divers éléments j , de masse atomique A_j . Soit X_j la fraction de masse de l'élément j .

$$n = \frac{\rho}{\mu m_H} = \sum_j \rho X_j \frac{N_{AV}}{A_j} (1 + E_j) \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \rho X_j & : \text{densité partielle de } j \\ N_{AV}/A_j & : \text{nombre d'atomes } j \text{ par gramme} (1/m_H = N_{AV}) \\ 1 + E_j & : \text{nombre de particules (1 ion + } E_j \text{ électrons)} \end{aligned} \quad (4.60)$$

On a donc

$$\frac{1}{\mu} = \sum_j \frac{X_j}{A_j} (1 + E_j) \quad (4.61)$$

Le nombre d'électrons libres par unité de volume est

$$n_e = \frac{\rho}{m_H} \sum_j \frac{X_j}{A_j} E_j \quad (4.62)$$

Définissons μ_e par

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\mu_e} \equiv \sum_j \frac{X_j}{A_j} E_j \quad (4.63)$$

Définissons également le nombre moyen d'électrons par atome ou ion

$$E = \frac{\sum_j \frac{X_j}{A_j} E_j}{\sum_j \frac{X_j}{A_j}}$$

Milieu neutre : $E_j = 0$

Le poids moléculaire moyen μ_0 de la matière neutre est

$$\frac{1}{\mu_0} = \sum_j \frac{X_j}{A_j} \quad (4.64)$$

Milieu complètement ionisé : $E_j = Z_j$

$$\frac{1}{\mu} = \sum_j \frac{X_j (1 + Z_j)}{A_j} \quad (4.65)$$

On représente souvent les abondances des éléments par X , Y , Z , fractions en masse de H , He et des éléments lourds. Pour le soleil, on a typiquement :

$$\begin{aligned} X &= 0.70 \\ Y &= 0.28 \\ Z &= 0.02 \end{aligned}$$

En fonction de X , Y , Z le poids moléculaire du milieu complètement ionisé sera

$$\frac{1}{\mu} \simeq 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{Z}{2} \quad (4.66)$$

En tenant compte du fait que $X + Y + Z = 1$, on a

$$\frac{1}{\mu} \simeq \frac{5X + 3 - Z}{4} \quad (4.67)$$

Pour H pur ionisé : $\mu = 1/2$

Pour des métaux ionisés : $\mu \simeq 2$

La concentration en électrons libres est

$$n_e = \frac{\rho}{m_H} \sum_j \frac{X_j}{A_j} Z_j \quad (4.68)$$

En fonction de X, Y, Z ,

$$n_e \simeq \frac{\rho}{2m_H} (1 + X) \quad (4.69)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\mu_e} \simeq \frac{1}{2} (1 + X) \quad (4.70)$$

Milieu partiellement ionisé

Considérons un milieu partiellement ionisé. Soit E la valeur moyenne du rapport

$$E = \frac{\text{nombre d'électrons libres}}{\text{nombre d'atomes ou d'ions}} \quad (4.71)$$

La pression des ions et des atomes neutres est

$$P_0 = \frac{k}{\mu_0 m_H} \rho T = \frac{R}{\mu_0} \rho T \quad (4.72)$$

La pression du gaz d'électrons est

$$P_e = \frac{R}{\mu_e} \rho T \quad (4.73)$$

μ_e : masse moyenne par électron libre

$$\mu_e = \frac{\mu_0}{E} \quad (4.74)$$

$$P_e = \frac{R}{\mu_0} E \rho T \quad (4.75)$$

La pression du gaz (atomes neutres, ions, électrons) est donc

$$P_g = \frac{R}{\mu_0} (1 + E) \rho T \quad (4.76)$$

et le poids moléculaire moyen du mélange est

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + E} \quad (4.77)$$

Il faut évaluer E , ce qui dans le cas d'un mélange d'éléments n'est pas immédiat. On note que la valeur du rapport

$$\frac{P_g}{P_e} = \frac{1 + E}{E} \quad (4.78)$$

$\frac{P_g}{P_e} \sim 2$ dans une étoile d'hydrogène où l'ionisation est complète, tandis que dans une étoile froide $\frac{P_e}{P_g} \rightarrow 0$. La pression totale, en tenant compte de la pression de radiation est

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T + \frac{1}{3} a T^4 \equiv \frac{R}{\mu \beta} \rho T \quad (4.79)$$

en désignant par β le rapport $\beta = P_g/P$.

4.5 Propriétés physiques du milieu partiellement ionisé

L'ionisation est un processus très important en astrophysique, notamment dans le milieu interstellaire, les étoiles, les noyaux de galaxies, etc. . . .

L'ionisation, surtout l'ionisation partielle modifie beaucoup les fonctions thermodynamiques du milieu, par exemple C_p et C_v .

QUESTION : *Pourquoi ?*

Dans la littérature, on étudie souvent l'ionisation partielle d'un milieu d'hydrogène pur. Cependant, ce traitement ne fait pas apparaître une caractéristique essentielle : le couplage des ionisations des divers éléments.

Considérons un mélange d' H et d' He partiellement ionisé. La théorie se généralise aisément au cas où d'autres éléments sont aussi partiellement ionisés.

Définissons ν_i

$$\nu_i = \frac{\text{nombre d'atomes ou d'ions de l'élément } i}{\text{nombre total d'atomes ou d'ions}} \quad (4.80)$$

On aura $\sum_i \nu_i = 1$. Soit aussi

$$X_i^s = \frac{\text{nombre d'atomes } i \text{ dans l'état d'ionisation } s}{\text{nombre d'atomes ou d'ions } i} \quad (4.81)$$

On aura donc pour E

$$E = \sum_i \nu_i \sum_{s=0}^{Z_i} s X_i^s \quad (4.82)$$

On définit aussi

$$Y_i^s = \sum_{r=s+1}^{Z_i} X_i^r \quad (4.83)$$

C'est le nombre d'atomes i dans les états d'ionisation supérieurs à s , relativement au nombre d'atomes ou d'ions de l'élément i . On a

$$E = \sum_i \sum_{s=0}^{Z_i-1} \nu_i Y_i^s \quad (4.84)$$

Dans le cas du mélange :

élément 1 : H, H^+
 élément 2 : He, He^+, He^{++}

Les quantités vues ci-dessus deviennent, en rapport de nombres :

$$X_1^1 = \frac{H^+}{H+H^+} \quad X_2^1 = \frac{He^+}{He+He^++He^{++}} \quad X_2^2 = \frac{He^{++}}{He+He^++He^{++}}$$

$$Y_1^0 = X_1^1 \quad Y_2^0 = X_2^1 + X_2^2 \quad Y_2^1 = X_2^2$$

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons les quantités ci-dessus respectivement par : $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$.

Alors,

$$\begin{aligned} E = \sum_i \nu_i Y_i &= \nu_1 X_1 + \nu_2 (X_2 + X_3) + \nu_2 X_3 \\ &= \nu_1 X_1 + \nu_2 (X_2 + 2X_3) \end{aligned}$$

L'équation de Saha nous donne le rapport

$$\frac{X_1 P_e}{(1 - X_1) P_g} = K_1 \quad (4.85)$$

avec

$$K_1 = \frac{(2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{5/2}}{\beta P h^3} \omega_1 e^{-I_1/kT} \quad (4.86)$$

et

$$\omega_1 = 2 \frac{U_{H^+}}{U_H} \quad (4.87)$$

L'équation de Saha ainsi écrite néglige les effets des interactions électrostatiques. On a ainsi au total 4 équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_1}{1-X_1} \frac{E}{1+E} &= K_1 \\ \frac{X_2}{1-X_2-X_3} \frac{E}{1+E} &= K_2 \\ \frac{X_3}{X_2} \frac{E}{1+E} &= K_3 \\ \nu_1 X_1 + \nu_2 (X_2 + 2 X_3) &= E \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 4 \text{ équations couplées} \\ \text{avec } X_1, X_2, X_3 \text{ et } E \\ \text{comme inconnues} \end{array} \quad (4.88)$$

Les termes K_i sont définis de la même manière que K_1 , avec

$$\begin{aligned} I_1 &= 13.598 \text{ eV} \\ I_2 &= 24.587 \text{ eV} \\ I_3 &= 54.416 \text{ eV} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2 \frac{U_H^+}{U_H} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ \omega_2 &= 2 \frac{U_{He^+}}{U_{He}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 4 \\ \omega_3 &= 2 \frac{U_{He^{++}}}{U_{He^+}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Ces équations sont applicables dans les milieux où la pression est faible (p. ex. couches extérieures des étoiles, milieu interstellaire). En profondeur dans les étoiles, les éléments sont complètement ionisés par effets électrostatiques (ionisation par effet de pression pour $[\log T - 0.123 \log P] > 4.09$).

Les quatre équations ci-dessus sont résolues par une méthode itérative; on suppose d'abord que seul H contribue à E , etc.

Fonctions thermodynamiques

Le calcul des fonctions thermodynamiques (p.ex. C_p , C_v , ∇_{ad} etc...) demande l'expression de $P(\rho, T)$ et celle de $U(P, T)$, énergie interne par unité de masse. L'énergie interne est la somme de l'énergie cinétique d'agitation thermique, de l'énergie d'ionisation dans les divers degrés d'ionisation de chaque élément, et de l'énergie du rayonnement.

$$\begin{aligned} U &= \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu m_H} + \frac{1}{\mu_0 m_H} \sum_i \nu_i \sum_{s=0}^{Z_i-1} Y_i^s I_i^s + \frac{a T^4}{\rho} \\ &= \frac{3}{2} \frac{RT}{\mu} + \frac{R}{\mu_0 k} \sum_i \nu_i \sum_{s=0}^{Z_i-1} Y_i^s I_i^s + \frac{3(1-\beta)}{\beta} \frac{RT}{\mu} \end{aligned}$$

$$U = \frac{R}{\mu_0} \left\{ \left[\frac{3}{2} + \frac{3(1-\beta)}{\beta} \right] (1+E)T + \frac{1}{k} \sum_i \nu_i \sum_{s=0}^{Z_i-1} Y_i^s I_i^s \right\} \quad (4.89)$$

Les diverses fonctions thermodynamiques du gaz partiellement ionisé ont été calculées par *Baker et Kippenhahn* (*Zeitschrift für Astrophysik*, **54**, 114, 1962). En exprimant $U(T, P)$, on a

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (4.90)$$

$$C_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_\rho = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_\rho = - \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \quad (4.91)$$

et

$$C_p = \frac{R}{\mu_0} \left\{ \left[\frac{5}{2} + \frac{4(1-\beta)(4+\beta)}{\beta^2} \right] (1+E) + \sum_i \frac{\nu_i}{G_i} \phi_i^2 \right\} \quad (4.92)$$

avec

$$\phi_i = \frac{5}{2} + \frac{4(1-\beta)}{\beta} + \frac{I_i}{kT} \quad (4.93)$$

et

$$G_i = \frac{1}{Y_i(1-Y_i)} + \frac{\nu_i}{E(1+E)} \quad (4.94)$$

L'intérêt de ces expressions est qu'elles peuvent se généraliser au cas de mélanges quelconques. Dans un milieu partiellement ionisé, les chaleurs spécifiques peuvent être multipliées par plus de 30 par rapport au cas de la matière non ionisée. En effet, durant l'ionisation, un apport de chaleur augmente le degré d'ionisation et la température du milieu varie peu.

On relève aussi que pour un milieu neutre, sans tenir compte de P_{rad}

$$C_v = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu_0} \quad (4.95)$$

tandis que pour un milieu complètement ionisé

$$C_v = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu_0} (1+E) \quad (4.96)$$

Dans le cas de l' H , la chaleur spécifique du milieu ionisé sera deux fois plus élevée que celle du milieu neutre.

4.6 Influence de l'état physique du milieu stellaire sur les chaleurs spécifiques. Les exposants adiabatiques.

Rappels et définitions

Dans le cas d'une transformation adiabatique dans un milieu de gaz parfait, on a par unité de masse (voir chapitre 2)

$$PV^\gamma = \text{const.} \quad \frac{P}{\rho^\gamma} = \text{const.} \quad \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{const.}$$

$$PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const.}$$

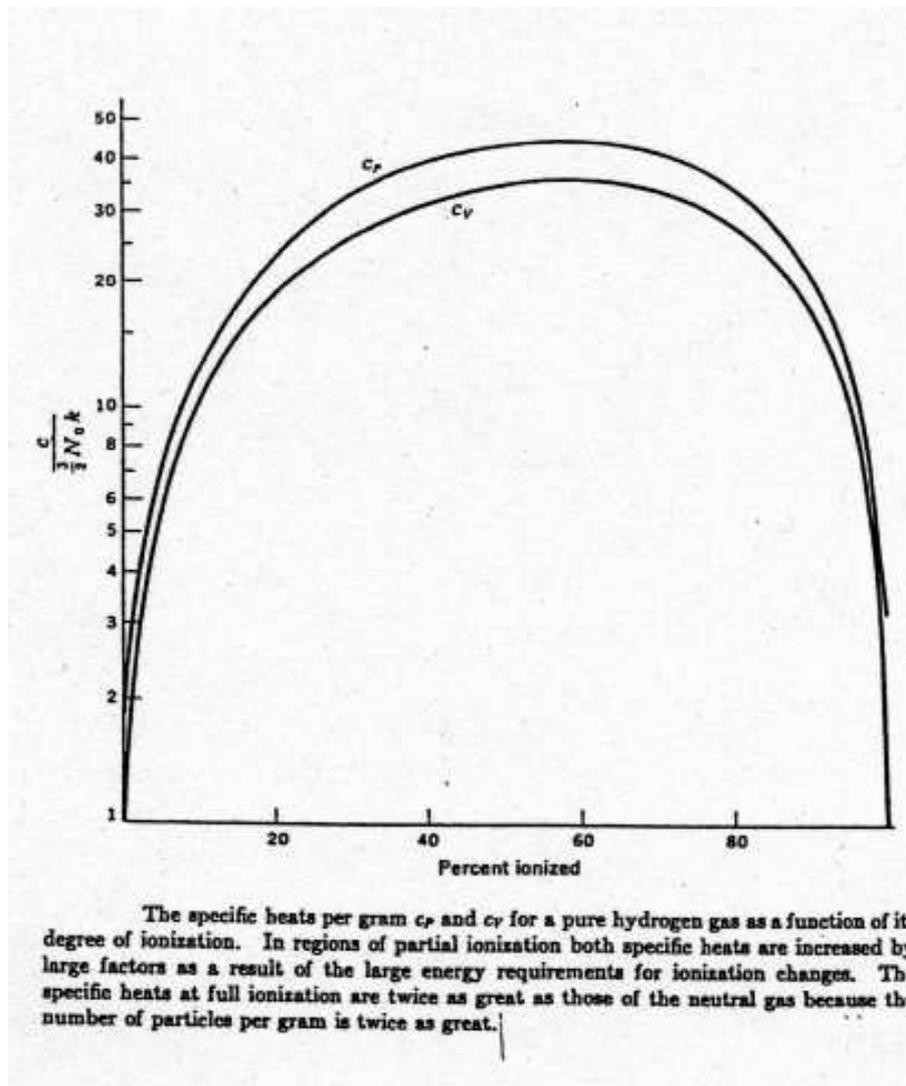


FIG. 4.8 – *Chaleurs spécifiques.*

Dans le cas de transformations adiabatiques pour un milieu ayant une équation d'état plus générale on écrira les expressions plus générales suivantes :

$$\frac{P}{\rho^{\Gamma_1}} = \text{const.} \quad \frac{T}{\rho^{\Gamma_3-1}} = \text{const.} \quad (4.97)$$

$$P T^{\frac{\Gamma_2}{1-\Gamma_2}} = \text{const.} \quad (4.98)$$

Les Γ_i sont définis par

$$\Gamma_1 \equiv \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_{ad} \quad \Gamma_3 - 1 \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right)_{ad} \quad \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \left(\frac{d \ln P}{d \ln T} \right)_{ad} \equiv \frac{1}{\nabla_{ad}}$$

- Ces “gammas” sont très utiles en structure stellaire, ils interviennent dans de nombreux problèmes, p. ex. : Γ_2 pour l'instabilité convective. Γ_1 et Γ_3 interviennent dans la théorie des pulsations notamment.
- Remarquons que deux seulement des trois Γ_i sont indépendants, on a en effet l'identité

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1} \quad (4.99)$$

- Les Γ_i , $i = 1 \text{ à } 3$ ne sont pas égaux à C_p/C_v , sauf dans le cas du gaz parfait. On aura des expressions de Γ_i qui dépendent de l'équation d'état du milieu considéré.

Quelques relations utiles

Quelques développements utiles sont montrés sur les Figs. 4.11, ?? et ??.

Relations entre les Γ_i et les chaleurs spécifiques

Considérons l'énergie interne $U = U(T, \rho)$. La première loi de la thermodynamique donne

$$\delta q = dU + P dV = C_v dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_T - \frac{P}{\rho^2} \right] d\rho \quad (4.100)$$

où δq est la chaleur fournie au système par unité de masse car

$$dU = C_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_T d\rho \quad (4.101)$$

Quelques relations utiles

$$\text{Montrons que } \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P = - \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_\rho$$

$$\text{et que } \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T = 1$$

Ecrivons $P = P(\rho, T)$

$$dP = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T d\rho + \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_\rho dT \quad (1)$$

$$dT = \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_P d\rho + \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_\rho dP \quad (2)$$

$$d\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T dP + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P dT \quad (3)$$

Remplaçons $d\rho$ en (1) par l'expression (3)

$$dP = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T \left[\left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T dP + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P dT \right] + \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_\rho dT$$

on en déduit immédiatement que

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T = 1$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P = - \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_\rho \quad \#$$

FIG. 4.9 -

Montrons que $\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = \frac{P}{p^2} - \frac{T}{p^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_p$

$$ds = \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \left(dU - \overbrace{\frac{P}{p^2} dp}^{+PdV} \right) \quad (\text{quantités par unité de masse})$$

$$= \frac{1}{T} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T dp - \frac{P}{p^2} dp \right)$$

$$= \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p dT + \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T - \frac{P}{p^2} \right] dp$$

comme S est une différentielle exacte on a que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial p} = \frac{\partial^2 S}{\partial p \partial T}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \right\} \Big|_T = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T - \frac{P}{p^2} \right] \right\} \Big|_p$$

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial T} = -\frac{1}{T^2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T - \frac{P}{p^2} \right] + \frac{1}{T} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial p} - \frac{1}{p^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_p \right]$$

$$\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = +\frac{P}{T^2 p^2} - \frac{1}{T p^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = \frac{P}{p^2} - \frac{T}{p^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_p \quad \#$$

FIG. 4.10 -

Montrons que $\nabla_{ad} = \frac{P \delta}{C_p \rho T}$

$$\delta Q = dU + P dV \underset{V(f,T)}{\overset{P}{\rho^2} - \frac{T}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial T} \rho} \\ \underset{C_v}{=} \frac{\partial U}{\partial T} dT + \left[\frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{1}{T} - \frac{P}{\rho^2} \right] d\rho$$

l'équation d'état $\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \alpha \frac{dP}{P} - \delta \frac{dT}{T}$

$$\alpha = \left. \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right|_T \quad \delta = - \left. \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right|_P$$

$$\delta Q = C_v dT - \frac{T}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial T} \rho \left(\alpha \rho \frac{dP}{P} - \delta \rho \frac{dT}{T} \right)$$

$$= \underbrace{\left(C_v + \frac{T}{\rho} \frac{\delta}{T} \frac{\partial P}{\partial T} \rho \right)}_{C_p} dT - \frac{T}{\rho} \frac{\alpha}{P} \frac{\partial P}{\partial T} \rho dP \\ - \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\rho}{T} \rho = - \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\rho}{T}$$

$$= C_p dT + \frac{T}{\rho} \frac{\alpha}{P} \frac{\rho}{P} \frac{(-\delta)}{\alpha} dP = C_p dT - \frac{\delta}{\rho} dP$$

le long d'une adiabatique $0 = C_p dT - \frac{\delta}{\rho} dP$

$$\Rightarrow \left. \frac{dT}{dP} \right|_{ad} = \frac{\delta}{\rho C_p}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_{ad} = \frac{\delta P}{\rho C_p T} = \nabla_{ad}$$

≠

FIG. 4.11 -

Dans le cas d'une transformation adiabatique, on a que l'Eq.(4.100) est égale à 0. Ceci donne

$$\Gamma_3 - 1 \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right)_{ad} = \frac{\frac{P}{\rho} - \rho \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_T}{C_v T} \quad (4.102)$$

On a en outre la relation thermodynamique suivante (rappelée au cours) :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_T = \frac{P}{\rho^2} - \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \quad (4.103)$$

Donc

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{1}{\rho C_v} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \quad (4.104)$$

On écrit l'équation d'état sous la forme générale

$$d \ln \rho = \alpha d \ln P - \delta d \ln T \quad (4.105)$$

avec

$$\alpha = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_T \quad \delta = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P \quad (4.106)$$

Lorsque ρ est constant, $d \ln \rho = 0$ et donc

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho = \frac{\delta}{\alpha}$$

donc

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{1}{\rho C_v} \frac{P}{T} \frac{\delta}{\alpha}$$

d'où

$$C_v = \frac{P \delta}{\rho T \alpha} \frac{1}{\Gamma_3 - 1} \quad (4.107)$$

On obtient ainsi une relation entre $\Gamma_3 - 1$ et C_v .

On obtient une relation entre Γ_1 et Γ_3 en utilisant l'expression générale pour l'équation d'état. Nous avons

$$d \ln \rho = \alpha d \ln P - \delta d \ln T \quad (4.108)$$

d'où

$$\Gamma_1 = \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_{ad} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} \left(\frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right)_{ad} \quad (4.109)$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} (\Gamma_3 - 1) \quad (4.110)$$

La chaleur spécifique C_p est obtenue par

$$\frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \equiv \nabla_{ad} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_{ad} = \frac{P \delta}{C_p \rho T}$$

Cette dernière égalité est démontrée au cours. Donc on a

$$C_p = \frac{P \delta}{\rho T} \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \quad (4.111)$$

En divisant les expressions pour C_p et C_v , on a

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \alpha (\Gamma_3 - 1) \quad (4.112)$$

qui devient, en utilisant $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1}$

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v} = \alpha \Gamma_1 \quad (4.113)$$

On vérifie immédiatement que si $\delta = \alpha = 1$ on a $\Gamma_1 = \Gamma_3 = \Gamma_2 = \gamma$.

Marche à suivre pour calculer les fonctions thermodynamiques :

Il faut connaître

$$\left. \begin{array}{l} P(\rho, T) \\ U(\rho, T) \end{array} \right\} \text{physique du milieu considéré}$$

On cherche en premier α et δ

$$\alpha = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_T \quad \delta = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P$$

Ensuite C_v

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_\rho$$

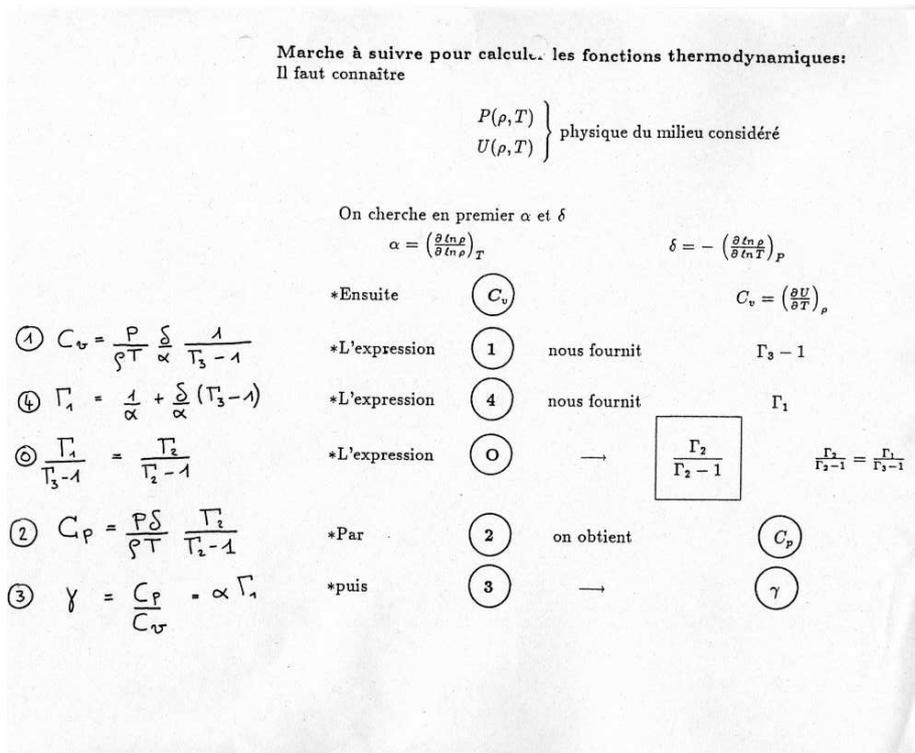


FIG. 4.12 -

L'expression (4.107) nous fournit

$$\Gamma_3 - 1.$$

L'expression (4.110) nous fournit

$$\Gamma_1.$$

L'expression (4.99) donne

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1}.$$

La chaleur spécifique C_p s'obtient par l'expression (4.111). L'équation (4.113) fournit γ . La Fig. 4.12 résume la procédure

4.7 Chaleurs spécifiques et exposants adiabatiques pour un mélange de gaz parfait et de rayonnement

Il s'agit de calculer α , δ , C_v , $\Gamma_3 - 1$, Γ_1 , $\Gamma_2/(\Gamma_2 - 1)$, C_p et γ en observant la marche à suivre.

$$P = \frac{1}{3} a T^4 + \frac{k}{\mu m_H} \rho T \quad (4.114)$$

On a donc

$$\rho = \frac{P}{\frac{kT}{\mu m_H}} - \frac{1}{3} \frac{a T^3}{\frac{k}{\mu m_H}} \quad (4.115)$$

$$\alpha = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_T = \frac{P}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T = \frac{P}{\rho} \frac{\mu m_H}{kT} = \frac{P}{P_g} \equiv \frac{1}{\beta} \quad (4.116)$$

$$\delta = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P = - \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (4.117)$$

$$\delta = \frac{T}{\rho} \frac{P}{\frac{kT^2}{\mu m_H}} + \frac{T}{\rho} \frac{a T^2}{k/\mu m_H} = \frac{P}{P_g} + \frac{3 P_{rad}}{P_g} \frac{P}{P} = \frac{1}{\beta} + \frac{3(1-\beta)}{\beta} = \frac{4}{\beta} - 3 \quad (4.118)$$

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \quad \delta = \frac{4}{\beta} - 3 \quad \frac{\delta}{\alpha} = 4 - 3\beta \quad (4.119)$$

De l'expression de l'énergie interne, (nous désignons par c_v , c_p les chaleurs spécifiques du gaz parfait et $\gamma_g = c_p/c_v$)

$$U = \frac{a T^4}{\rho} + \underbrace{C_v T}_{\frac{c_p - c_v}{c_v} T} = \frac{c_p - c_v}{c_v} T = \frac{k/\mu m_H}{\gamma_g - 1} T$$

On tire C_v la chaleur spécifique à $V = \text{const}$ du mélange.

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_\rho = \frac{4a T^3}{\rho} + \frac{k/\mu m_H}{\gamma_g - 1} \quad (4.120)$$

QUESTION : *Montrer que*

$$C_v = \frac{k/\mu m_H}{\gamma_g - 1} \left(\frac{\beta + 12(\gamma_g - 1)(1 - \beta)}{\beta} \right) \quad (4.121)$$

Pour un gaz monoatomique $\gamma_g = 5/3$.

$$c_v = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu m_H} \quad (4.122)$$

$$C_v = c_v \frac{8 - 7\beta}{\beta} \quad (4.123)$$

On obtient $\Gamma_3 - 1$ à l'aide de l'équation (4.107)

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{P}{\rho T} \frac{\delta/\alpha}{C_v} = \frac{(4 - 3\beta)(\gamma_g - 1)}{\beta + 12(\gamma_g - 1)(1 - \beta)} \quad (4.124)$$

Pour un gaz monoatomique,

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{8 - 6\beta}{24 - 21\beta} \quad (4.125)$$

Par l'Eq. (4.110) $\Gamma_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} (\Gamma_3 - 1)$

$$\Gamma_1 = \beta + \frac{(4 - 3\beta)^2 (\gamma_g - 1)}{\beta + 12(\gamma_g - 1)(1 - \beta)} \quad (4.126)$$

Pour un gaz monoatomique,

$$\Gamma_1 = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{3(8 - 7\beta)} \quad (4.127)$$

Ensuite, on obtient $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{1}{\nabla_{ad}}$.

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1} &= \frac{[\beta + 12(\gamma_g - 1)(1 - \beta)] \left[\beta + \frac{(4 - 3\beta)^2 (\gamma_g - 1)}{\beta + 12(\gamma_g - 1)(1 - \beta)} \right]}{(4 - 3\beta)(\gamma_g - 1)} \\ &= \frac{\beta^2 + 12\beta(\gamma_g - 1)(1 - \beta) + (4 - 3\beta)^2 (\gamma_g - 1)}{(4 - 3\beta)(\gamma_g - 1)} \end{aligned}$$

Pour un gaz monoatomique avec $\gamma_g = 5/3$, on a

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{1}{\nabla_{ad}} = \frac{-3\beta^2 - 24\beta + 32}{2(4 - 3\beta)} \quad (4.128)$$

On vérifie aisément que pour $\beta \rightarrow 1$ (gaz parfait), $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ tendent vers γ_g .

Pour $\beta \rightarrow 0$ $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 4/3$.

Dans le cas général, les Γ_i ont des valeurs intermédiaires entre $5/3$ et $4/3$.

Le rapport $\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v}$ du mélange s'obtient par l' Eq.(4.113)

$$\gamma = \alpha \Gamma_1 = 1 + \frac{(4 - 3\beta)^2 (\gamma_g - 1)}{\beta^2 + 12\beta (\gamma_g - 1) (1 - \beta)} \quad (4.129)$$

et pour un gaz monoatomique, il vaut

$$\gamma = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{3\beta(8 - 7\beta)} \quad (4.130)$$

Finalement, C_p s'obtient par

$$C_p = \alpha \Gamma_1 C_v \quad (4.131)$$

On trouve après simplification

$$C_p = \frac{1}{\beta^2} \frac{k/\mu m_H}{\gamma_g - 1} \left[4(\beta^2 + 4\gamma_g - 4) - 3\beta(-4 + 4\gamma_g + \beta\gamma_g) \right] \quad (4.132)$$

$$\text{Pour } \gamma = \frac{5}{3}, \quad C_p = \frac{k}{\beta^2 \mu m_H} \frac{3}{2} \left[\frac{32}{3} - 8\beta - \beta^2 \right]$$

$$\text{et si } \beta = 1, \quad C_p = \frac{5}{2} \frac{k}{\mu m_H}$$

On note que l'augmentation relative de P_{rad} accroît les chaleurs spécifiques, tandis que les $\Gamma_i \rightarrow 4/3$; c'est un facteur d'instabilités stellaires. La Fig. 4.13 résume les résultats obtenus.

Équations spécifiques et exponents adiabatiques pour un mélange de gaz parfait et de rayonnement ($\beta = \frac{P_{\text{gazo}}}{P}$)

$$\bullet \quad \alpha = \frac{1}{\beta} \quad \delta = \frac{4}{\beta} - 3$$

$$\bullet \quad C_v = \frac{k/\mu_{\text{MH}}}{\gamma_{\text{gp}} - 1} \left(\frac{\beta + 12(\gamma_{\text{gp}} - 1)(1 - \beta)}{\beta} \right) \quad \gamma_{\text{gp}} = \left(\frac{C_p}{C_v} \right)_{\text{pour gaz parfait}}$$

pour un gaz monoatomique $\gamma_{\text{gp}} = \frac{5}{3} \quad C_{v, \text{gp}} = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu_{\text{MH}}}$

$$C_v = C_{v, \text{gp}} \frac{8 - 7\beta}{\beta}$$

$$\bullet \quad \Gamma_3 - 1 = \frac{(4 - 3\beta)(\gamma_{\text{gp}} - 1)}{\beta + 12(\gamma_{\text{gp}} - 1)(1 - \beta)} \quad \text{pour gaz mono.} \quad \Gamma_3 - 1 = \frac{8 - 6\beta}{24 - 21\beta}$$

$$\bullet \quad \Gamma_1 = \beta + \frac{(4 - 3\beta)^2(\gamma_{\text{gp}} - 1)}{\beta + 12(\gamma_{\text{gp}} - 1)(1 - \beta)} \quad \text{pour gaz mono.} \quad \Gamma_1 = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{3(8 - 7\beta)}$$

$$\bullet \quad \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{\beta^2 + 12\beta(\gamma_{\text{gp}} - 1)(1 - \beta) + (4 - 3\beta)^2(\gamma_{\text{gp}} - 1)}{(4 - 3\beta)(\gamma_{\text{gp}} - 1)}$$

pour un gaz mon. $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{1}{\nabla_{\text{ad}}} = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{2(4 - 3\beta)}$

$$\bullet \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{(4 - 3\beta)^2(\gamma_{\text{gp}} - 1)}{\beta^2 + 12\beta(\gamma_{\text{gp}} - 1)(1 - \beta)}$$

pour un gaz monoatomique $\gamma = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{3\beta(8 - 7\beta)}$

$$\bullet \quad C_p = \frac{1}{\beta^2} \frac{k/\mu_{\text{MH}}}{\gamma_{\text{gp}} - 1} \left[4(\beta^2 + 4\gamma_{\text{gp}} - 4) - 3\beta(-4 + 4\gamma_{\text{gp}} + \beta\gamma_{\text{gp}}) \right]$$

pour un gaz monoatomique $C_p = \frac{k}{\beta^2 \mu_{\text{MH}}} \left[16 - 12\beta - \frac{3}{2}\beta^2 \right]$

FIG. 4.13 -

Chapitre 5

Les gaz dégénérés

5.1 Généralités

Les fermions, particules de spin demi-entier, obéissent à la statistique de *Fermi-Dirac*. Considérons des fermions dans un certain volume, le Principe d'Exclusion nous dit que l'extension en phase de chaque particule satisfait l'inégalité suivante

$$\Delta^3 p_i \Delta^3 q_i \geq h^3$$

Cette expression nous permet déjà de saisir que si l'on confine fortement les fermions (c.à.d. $\Delta q_i \searrow$), nous aurons, lorsque la limite ci-dessus sera atteinte, des impulsions croissantes $\Delta p_i \nearrow$. Donc des vitesses élevées et une nouvelle source de pression d'origine non-thermique.

Considérons un milieu ionisé, avec des électrons et des noyaux :

$$\begin{array}{ll} \text{électrons} & m_e \quad p_e \\ \text{noyaux} & m_N \quad p_N \end{array}$$

L'équipartition de l'énergie implique (cas non relativiste)

$$\frac{p_N^2}{2m_N} = \frac{p_e^2}{2m_e},$$

d'où

$$\frac{p_N}{p_e} = \left(\frac{m_N}{m_e}\right)^{1/2} = A^{1/2} \left(\frac{m_H}{m_e}\right)^{1/2}$$

Pour une même valeur de l'énergie, le domaine des impulsions des noyaux est $A^{3/2} (m_H/m_e)^{3/2}$ plus grand que celui des électrons. Ce sont donc les électrons qui vont se heurter les premiers au Principe de Pauli, lorsque la densité augmente dans le milieu. Ce phénomène dit de dégénérescence intervient dans le cas des neutrons pour $\rho \sim 10^{14} \text{ kg/dm}^3$, et dans le cas des électrons pour $\rho \sim 10^{-2}$ à $T = 300 \text{ K}$ et pour $\rho \sim 10^4$ à $T = 10^7 \text{ K}$.

Soit N fermions d'énergie totale E , N_r fermions d'énergie E_r avec

$$E = \sum_r N_r E_r \quad N = \sum_r N_r$$

$$N_r = \frac{g_r}{e^{-\psi + \frac{E_r}{kT}} + 1},$$

g_r est le poids statistique des particules d'énergie E_r dans le domaine $\Delta^3 p_r \Delta^3 q_r$. Pour les électrons qui ont deux états de spin, g_r vaut

$$g_r = \frac{2}{h^3} \Delta^3 p_r \Delta^3 q_r$$

(Pour des neutrinos dégénérés, ce qui survient lors d'explosions de supernovae, le facteur numérique est 1). En passant à la limite pour une distribution continue et isotrope des énergies cinétiques, on a pour le nombre de particules par unité de volume spatial

$$n(p) d^3 p = \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} \underbrace{\frac{1}{e^{-\psi + \frac{E}{kT}} + 1}}_{q(\psi, E/kT)}$$

$q(\psi, E/kT)$ est le taux d'occupation des cellules.

Remarques :

1. Un gaz non dégénéré est un gaz pour lequel $q \ll 1$, pour toute valeur de E/kT . Cela signifie donc que $\psi \ll -1$. Dans ce cas

$$q \simeq e^\psi \cdot e^{-E/kT}$$

et la distribution est donnée par la loi de Maxwell–Boltzmann.

2. Un gaz complètement dégénéré est un gaz pour lequel $\psi \rightarrow \infty$. Pour les énergies inférieures à une certaine valeur E_F , énergie de Fermi, on a $q = 1$. Au-dessus on a $q = 0$. Notons que si toutes les cellules de l'espace de phase sont occupées par deux particules

$$n(p) d^3 p = \frac{8\pi p^2 dp}{h^3}$$

3. $q = \frac{1}{2}$ pour $\frac{E}{kT} = \psi$
 4. Même pour $T = 0$, les particules ont des vitesses non nulles.

5.2 Gaz partiellement dégénéré

Entre l'état de gaz parfait et celui de gaz complètement dégénéré d'électrons, il y a une suite continue d'états partiellement dégénérés. Cherchons les expressions de $P(\rho, T)$ et de l'énergie interne. On a pour la concentration électronique

$$n_e = \iiint n(p) d^3 p = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{-\psi + \frac{E}{kT}} + 1}$$

La densité ρ est $\rho = \mu_e m_H n_e$ et la pression (cf. chapitre I),

$$P = \frac{1}{3} \iiint n(p) p v d^3 p$$

en se souvenant que $n(p) d^3 p$ est la concentration spatiale, on a

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^\infty v \frac{p^3 dp}{e^{-\psi + \frac{E}{kT}} + 1}$$

et pour la densité d'énergie

$$u = \int_0^\infty E n(p) d^3 p = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{E p^2 dp}{e^{-\psi + \frac{E}{kT}} + 1},$$

où E est l'énergie cinétique de translation. Pour des densités croissantes à $T = \text{const.}$, un gaz passera par les stades de : gaz parfait - partiellement

dégénéré - complètement dégénéré non relativiste - complètement dégénéré
partiellement relativiste - complètement dégénéré relativiste.

Gaz partiellement dégénéré non relativiste

Dans ce cas $E = \frac{p^2}{2m_e}$. Posons $x = \frac{E}{kT} = \frac{p^2}{2m_e kT}$.

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{8\pi}{h^3} \frac{(2m_e kT)^{3/2}}{2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^{-\psi+x} + 1} \\ &= \frac{4\pi}{h^3} (2m_e kT)^{3/2} F_{1/2}(\psi) \end{aligned}$$

Les intégrales de Fermi sont définies par

$$F_n(\psi) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^{-\psi+x} + 1}$$

Ces intégrales sont tabulées pour $F_{1/2}$, $F_{3/2}$. Il existe également des développements en série dans plusieurs cas intéressants. Réf. : *Cox and Giuli* Principles of stellar structure, p. 1143.

La pression devient, en notant que

$$v = \frac{p}{m_e}$$

$$P = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{e^{-\psi+E/kT} + 1} = \frac{8\pi}{3h^3} kT (2m_e kT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{\underbrace{e^{-\psi+x} + 1}_{F_{3/2}(\psi)}}$$

L'équation d'état est donc définie par les deux équations paramétriques

$$\begin{aligned} P &= \frac{8\pi}{3h^3} (2m_e kT)^{3/2} kT F_{3/2}(\psi) \\ \rho &= \frac{4\pi}{h^3} (2m_e kT)^{3/2} \mu_e m_H F_{1/2}(\psi) \end{aligned}$$

Cas de dégénérescence très faible ($\psi \ll -1$)

$$F_n(\psi) \longrightarrow e^\psi \int_0^\infty e^{-x} x^n dx$$

L'intégrale

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$$

La fonction gamma jouit de diverses propriétés

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(1.5) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \text{donc } F_{1/2}(\psi) &= \frac{\sqrt{\pi} e^\psi}{2} \\ \Gamma(2.5) &= \frac{3}{4} \sqrt{\pi} & F_{3/2}(\psi) &= \frac{3}{4} \sqrt{\pi} e^\psi \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} P &= \frac{8\pi}{3h^3} (2m_e kT)^{3/2} kT \frac{3}{4} \sqrt{\pi} e^\psi \\ \rho &= \frac{4\pi}{h^3} (2m_e kT)^{3/2} \mu_e m_H \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^\psi \end{aligned}$$

Dans ce cas, on calcule aisément ψ fonction de (ρ, T) et on vérifie que la pression électronique suit la loi des gaz parfaits

$$\frac{P}{\rho} = \frac{kT}{\mu_e m_H}$$

Cas de dégénérescence très forte ($\psi \gg 1$)

Les fonctions de Fermi deviennent

$$F_n(\psi) = \int_0^\psi x^n dx = \frac{\psi^{n+1}}{n+1}$$

QUESTION : Pourquoi la limite supérieure d'intégration est-elle prise égale à ψ ?

QUESTION : Montrer que dans ce cas, l'équation d'état devient

$$P = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}$$

et trouver K_1

Remarque :

On peut également obtenir les expressions de la densité d'énergie interne, et vérifier $P = \frac{2}{3} u$.

5.3 Gaz complètement dégénérés

Lorsque ρ augmente, le gaz devient complètement dégénéré N.R., puis la vitesse des électrons tendant vers c , on a le cas complètement dégénéré relativiste. Dans les deux cas limites, l'équation d'état se dérive très facilement.

Gaz complètement dégénéré N.R.

Il suffit de prendre

$$q(\psi, E/kT) = 1$$

jusqu'à p_F et zéro au-dessus. On a

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3$$

et

$$\frac{\rho}{\mu_e} = \frac{8\pi}{3} \frac{m_H}{h^3} p_F^3$$

On utilisera cette expression pour obtenir p_F à ρ donné. La pression devient

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} \frac{p}{m_e} p^3 dp = \frac{8\pi}{15h^3} \frac{p_F^5}{m_e}$$

En éliminant p_F , on a

$$P = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}$$

avec

$$K_1 = \frac{8\pi}{15 h^3 m_e} \left(\frac{3 h^3}{8\pi m_H} \right)^{5/3} = 1.004 \cdot 10^{13} \text{ CGS}$$

La pression n'est fonction que de ρ , elle est indépendante de T . Elle est donc identique à 0 K et à des valeurs plus élevées de T , tant que $kT \ll E_F$.

QUESTION : Vérifier que $P = \frac{2}{3} u$ dans ce cas.

Gaz complètement dégénéré relativiste

Dans ce cas, $v \rightarrow c$. n_e et ρ/μ_e sont donnés par les mêmes expressions que dans le cas N.R. Pour la pression, on a

$$P = \frac{8\pi}{3 h^3} \int_0^{p_F} c p^3 dp = \frac{2\pi c}{3 h^3} p_F^4$$

et

$$P = K_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}$$

avec

$$K_2 = \frac{hc}{8 m_H} \left(\frac{3}{\pi m_H} \right)^{1/3}$$

Dans le cas relativiste une augmentation de 1% de la densité, produit une augmentation de 4/3% de la pression, alors que dans le cas non relativiste, cela produit une augmentation de 5/3% de la pression. Pourquoi dans le cas relativiste, l'augmentation relative de pression est-elle plus faible ? Physiquement cela résulte du fait que lorsque les vitesses sont bien inférieures à c , une augmentation de l'énergie des électrons se traduit presque exclusivement en terme d'augmentation de la vitesse et donc de la pression. Dans le cas relativiste, une augmentation de l'énergie implique également une augmentation de l'inertie. La vitesse elle n'augmentant quasiment plus. Cela diminue l'augmentation relative de pression. Pour l'énergie interne u ,

$$u = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty E p^2 dp = \frac{8\pi c}{h^3} \frac{p_F^4}{4} \quad \text{avec } E = pc$$

Dans ce cas, on a $P = \frac{1}{3} u$.

Remarque

L'énergie totale d'une particule relativiste est donnée par

$$E_T = \left((m_0 c^2)^2 + (pc)^2 \right)^{1/2}$$

avec m_0 la masse au repos. La Fig. 5.1 donne un moyen mnémotechnique de se souvenir de cette relation.

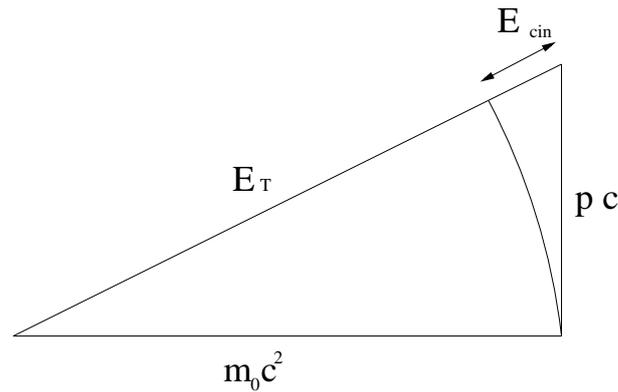


FIG. 5.1 –

QUESTION : *Montrer que $E = E_{cin} = (\gamma - 1)m_0 c^2$. Utiliser la définition de $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ et le fait que $p = \gamma m_0 v$.*

Lorsque $v \rightarrow c$, $\gamma \gg 1$ donc $E \rightarrow \gamma m_0 c^2$, $p \rightarrow \gamma m_0 c$, donc $p = E/c$.

Gaz complètement dégénéré partiellement relativiste

Examinons le cas intermédiaire entre les deux cas précédents.

QUESTION : *Montrer que*

$$v = \frac{p/m_0}{\left(1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2\right)^{1/2}}$$

La pression vaut

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int \frac{(p/m_0) p^3 dp}{\left(1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2\right)^{1/2}} \quad q \left(\psi \frac{E}{kT} \right) = 1$$

En substituant $\sinh \vartheta = \frac{p}{m_0 c}$ on obtient

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} m_0^4 c^5 \int_0^{\vartheta_F} \frac{\sinh^4 \vartheta \cosh \vartheta d\vartheta}{\underbrace{(1 + \sinh^2 \vartheta)^{1/2}}_{\cosh \vartheta}}$$

On a par partie

$$\int_0^{\vartheta_F} \sinh^4 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{4} \sinh^3 \vartheta_F \cosh \vartheta_F - \frac{3}{16} \sinh 2\vartheta_F + \frac{3}{8} \vartheta_F$$

En posant $x = \sinh \vartheta_F = p_F / m_0 c$, on a

$$8 \int_0^{\vartheta_F} \sinh^4 \vartheta d\vartheta = x(x^2 + 1)^{1/2} (2x^2 - 3) + 3 \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

et finalement

$$P = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3h^3} f(x)$$

avec

$$f(x) = x(x^2 + 1)^{1/2} (2x^2 - 3) + 3 \ln \underbrace{(x + \sqrt{1 + x^2})}_{\sinh^{-1} x}$$

La densité s'écrit toujours de la même façon

$$\rho = \frac{8\pi}{3} \mu_e m_H \left(\frac{m_0 c}{h} \right)^3 x^3$$

Ces deux relations nous fournissent les équations paramétriques du gaz complètement dégénéré partiellement relativiste. On retrouve les deux cas limites.

Cas N.R. ($x \ll 1$)

Le terme en ln domine

$$f(x) \rightarrow \frac{8}{5} x^5$$

et on retrouve

$$P = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}$$

Cas R. ($x \gg 1$)

$$f(x) = 2x^4$$

Nous avons donc trouvé l'équation des gaz dégénérés dans les divers cas possible. La principale caractéristique est la disparition de T de l'équation des gaz complètement dégénérés.

Remarque

Des approximations analytiques simples et précises (à 0.1%) des intégrales de Fermi ont été établies par *Eggleton et al.*, 1973, *Astron. Astrophys.* **23**, 35.

QUESTION : *A quelle température faut-il chauffer une barre de fer pour lever la dégénérescence du gaz électronique ? Supposer la densité inchangée $\rho \simeq 7 \text{ kg/dm}^3$.*

5.4 Conséquences remarquables de la loi des gaz dégénérés

Il vaut la peine de relever quelques conséquences très importantes de la loi des gaz dégénérés.

Réacteur stellaire stable ou explosif

Pourquoi le Soleil n'explose-t-il pas d'un seul coup, tout le combustible nucléaire étant disponible ?

Nous avons vu au chapitre 3 que, à masse et composition données, c'est l'opacité κ qui détermine L . Les réactions nucléaires s'ajustent afin de compenser ces pertes en surface. Cela est possible dans le cas du gaz parfait, où $P = P(\rho, T)$.

Cas $P = P(\rho, T)$

- Supposons un excès d'énergie δQ produit au centre de l'étoile.
- T augmente.
- Cela entraîne une expansion due au couplage $P(\rho, T)$

- Il y a augmentation d'énergie potentielle et par conséquent baisse d'énergie interne (Th. du Viriel). Donc T diminue.
- Diminution du taux des réactions nucléaires, et baisse de δQ

A l'inverse, si il y a un défaut d'énergie, les réactions nucléaires s'ajustent également.

Le système est auto-contrôlé. Les réactions nucléaires sont stables dans une étoile où prévaut la loi du gaz parfait.

Cas $P = P(\rho)$

- Supposons également un excès énergétique central.
- T augmente.
- PAS D'EXPANSION, car P est indépendant de T .
- Le taux de production nucléaire augmente.
- Donc $\delta Q > 0 \Rightarrow \delta Q \gg 0$

Pas d'auto-contrôle : emballement, EXPLOSION. Les réactions nucléaires sont explosives dans un milieu dégénéré.

Exemples :

- Supernovae dites de type $I^{1/2}$, résultant de la détonation du carbone en milieu dégénéré (étoile de $7 - 8 M_{\odot}$).
- Novae : système binaire formé d'une géante et d'une naine blanche. L'accrétion d'H sur la naine blanche provoque un phénomène éruptif, qui peut être récurrent.
- γ -bursts, sursauts γ : même phénomène que pour les novae, mais résultant de l'accrétion sur une étoile à neutrons.

Contraction stellaire

On montre (voir cours de structure interne) que la contraction d'une sphère de gaz parfait produit un échauffement de celle-ci, accompagné par l'émission de rayonnement.

L'absence de couplage entre P et T fait que la compression d'une sphère de gaz dégénéré peut provoquer, suivant le domaine considéré, aussi bien un

refroidissement¹ qu'un échauffement.

Relation masse–rayon pour des astres dégénérés

Dans une étoile en équilibre, l'expression de l'équilibre hydrostatique

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g = -\rho \frac{GM_r}{r^2}$$

conduit en toute généralité à une expression de la pression moyenne de la forme (voir cours d'introduction)

$$P \simeq \frac{GM^2}{R^4}$$

Pour un astre dégénéré, $P = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$, d'où

$$\frac{GM^2}{R^4} \simeq \frac{K_1}{4^{5/3} \mu_e^{5/3}} \frac{M^{5/3}}{R^5}$$

On a donc

$$R \cdot M^{1/3} \simeq \text{const}$$

Pour des masses M plus grandes, on a des rayons R plus petits.

QUESTION : *En utilisant l'expression ci-dessus, montrer que pour une masse M donnée on a*

$$\frac{R_{\text{N. bl.}}}{R_* \text{ à neutrons}} \simeq \frac{m_{\text{neutron}}}{m_{\text{électron}}}$$

Il y aura évidemment une limite supérieure à la masse des astres dégénérés.

Naines blanches : Masse de Chandrasekhar $M_{Ch} \simeq 1.4 M_\odot$

Étoiles à neutrons : Masse de Oppenheimer-Volkoff $M_{OV} \simeq 2 M_\odot$

La valeur exacte dépend du potentiel nucléaire à très courte distance.

¹Dans ce cas, ceci peut s'expliquer de la manière suivante : la nécessité pour les électrons d'occuper des cellules dans l'espace de phase d'énergie toujours plus élevée lorsque la densité augmente implique de tirer l'énergie nécessaire d'un réservoir. Il y a refroidissement lorsque ce réservoir est l'énergie thermique des ions.

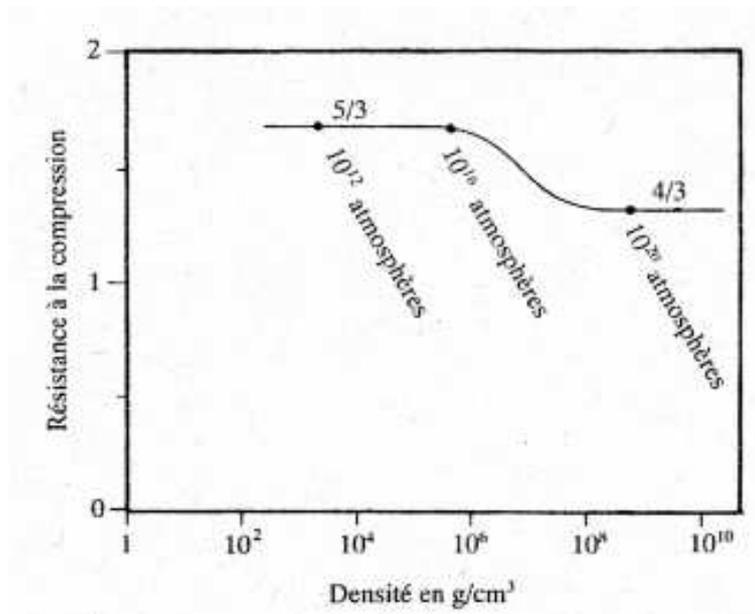


FIG. 5.2 – Relation entre la densité de la matière et sa résistance à la compression pour des naines blanches (augmentation relative de la pression). Tiré de “Trous noirs et distortions du temps” de Kip S. Thorne, Champs, Flammarion.

5.5 Effets électrostatiques

Dans le cas des densités voisines de celle de la matière terrestre ordinaire, on ne peut négliger les interactions coulombiennes entre particules chargées. L’un des cas extrêmes est celui de la cristallisation. Il importe donc d’examiner dans quelle mesure les interactions électrostatiques modifient les propriétés des milieux astrophysiques. Les effets sont de divers types :

1. La pression sera différente de celle des cas idéaux, gaz parfait ou gaz dégénéré.
2. Les propriétés des niveaux atomiques sont modifiées, en particulier les potentiels d’ionisation.
3. Les propriétés des réactions nucléaires sont influencées.
4. Le transport d’énergie par les électrons libres peut être important (conduction).

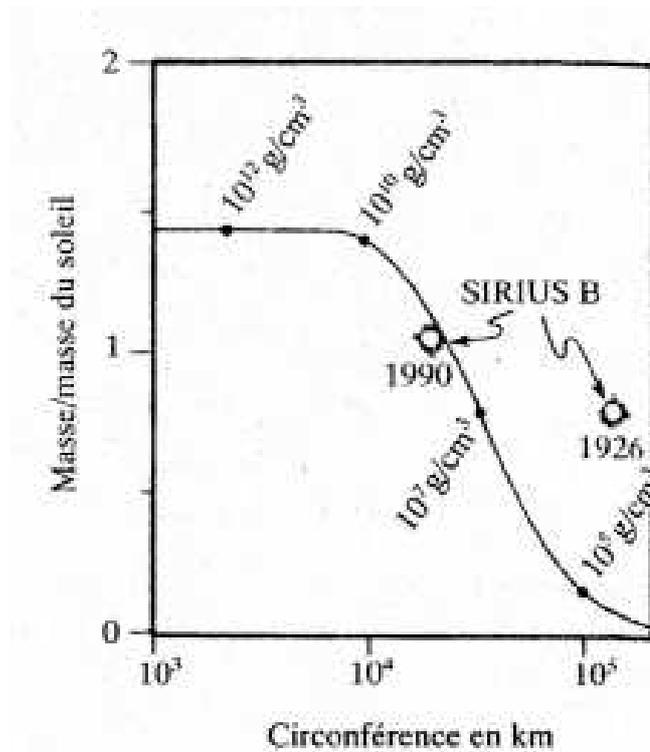


FIG. 5.3 – Relation masse-rayon pour des naines blanches telle que calculée par Chandrasekhar. Tiré de “Trous noirs et distortions du temps” de Kip S. Thorne, Champs, Flammarion.

Nous commencerons par effectuer quelques rappels sur une notion vue en physique du solide, le rayon de Debye-Hückel.

Le rayon de Debye-Hückel

Considérons un ion de charge Z_i entouré d’un nuage d’électrons. Le potentiel ϕ obéit à l’équation de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = -4\pi \rho_e$$

ρ_e est la densité de charge au point considéré.

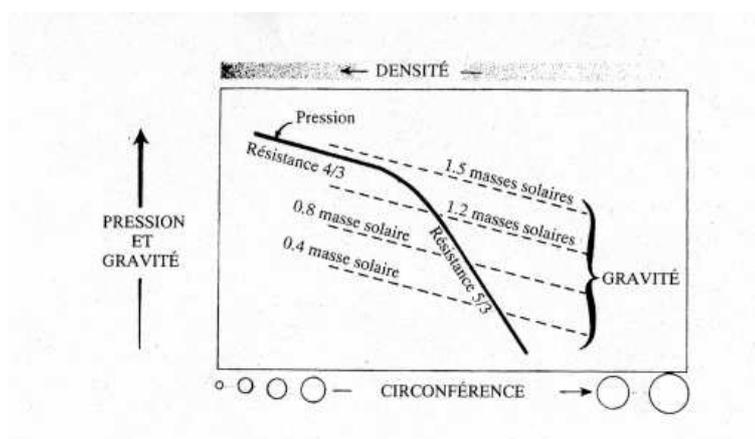


FIG. 5.4 – A droite de la courbe la gravité l’emporte sur la pression de dégénérescence et l’étoile se contracte. A gauche de la courbe, la pression de dégénérescence l’emporte sur la gravité et l’étoile se dilate. Lorsque les régions centrales d’une étoile se contracte elle le fait le long des courbes en traits-tirets. En dessous d’une certaine masse, la contraction s’arrête sur la courbe, au-dessus d’une certaine masse limite appelée masse de Chandrasekhar, la contraction n’est plus stoppée par la pression de dégénérescence des électrons. Tiré de “Trous noirs et distortions du temps” de Kip S. Thorne, Champs, Flammarion.

En présence du potentiel dû aux autres ions, la concentration des ions n_i est

$$n_i = n_{0i} e^{-Z_i e \phi / kT}$$

n_{0i} est la concentration en l’absence de perturbation, pour $\phi = 0$.

C’est la loi de Boltzmann, applicable si on considère les ions comme indépendants. De même pour les électrons, on a

$$Z = -1 \quad n_e = n_{0e} e^{+e\phi/kT}$$

$$\begin{aligned} n_e &> n_{0e} \\ n_i &< n_{0i} \end{aligned} = \text{les électrons sont attirés par les ions}$$

En développant au 1er ordre

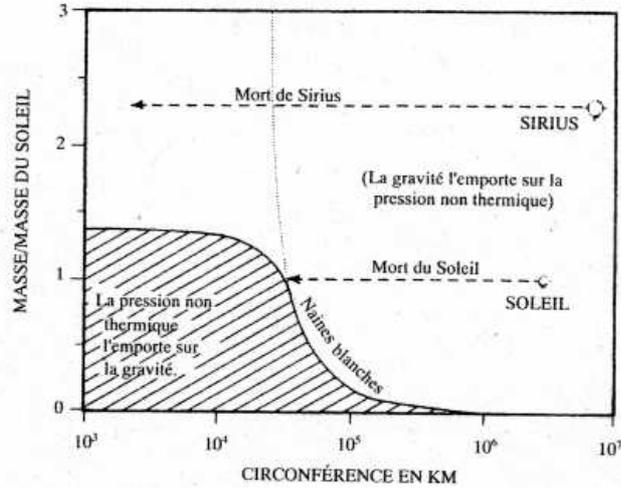


FIG. 5.5 – Cette figure illustre le même effet que celui montré à la Fig. 5.4. Si l'exposant adiabatique Γ_1 restait toujours égal à $5/3$, comme dans le cas complètement dégénéré non relativiste, la relation entre masse et circonférence suivrait la ligne en pointillés. Tiré de "Trous noirs et distortions du temps" de Kip S. Thorne, Champs, Flammarion.

$$n_i = n_{0i} \left(1 - \frac{Z_i e \phi}{kT} \right)$$

$$n_e = n_{0e} \left(1 + \frac{e\phi}{kT} \right)$$

La densité de charge est

$$\rho_e = \sum_i n_i Z_i e - n_e e$$

elle devient

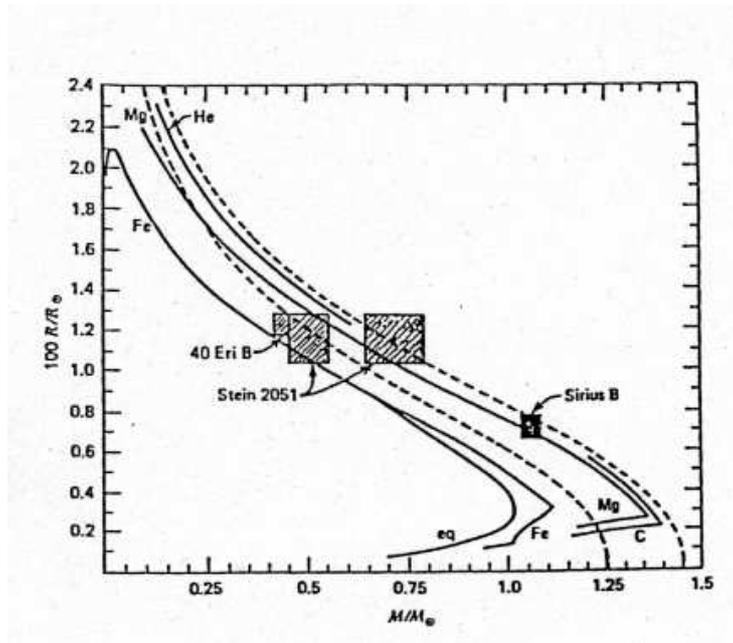


FIG. 5.6 – Relation masse rayon pour des astres complètement dégénérés à température nulle. La composition considérée est indiquée. Les lignes en traitillés correspondent aux courbes de Chandrasekhar pour $\mu_e = 2$ et $\mu = 2.15$ (de gauche à droite). Noter que plus lourds sont les noyaux, plus petit est le rayon de l'astre à masse donnée. Les positions de quelques naines blanches sont indiquées.

$$\rho_e = \underbrace{\sum_i n_{0i} Z_i e - n_{0e} e}_{= 0 \text{ neutralité en l'absence de champ perturbateur}} - \sum_i \frac{n_{0i} Z_i^2 e^2 \phi}{kT} - \frac{-n_{0e} e^2 \phi}{kT}$$

On peut écrire

$$\rho_e = \frac{-\phi e^2}{kT} \chi n$$

avec $n = \sum_i n_{0i} + n_{0e}$, le nombre total de particules par unité de volume sans fluctuations

et

$$\chi = \sum_i \frac{n_{0i}}{n} Z_i (Z_i + 1)$$

la charge effective. On a utilisé le fait que la matière non perturbée est neutre $n_{0i} Z_i = n_{0e}$.

Avec

$$n_{0i} = N_{AV} \frac{\rho X_i}{A_i} \quad \text{et} \quad n = N_{AV} \frac{\rho}{\mu}$$

$$\chi = \mu \sum_i \frac{X_i}{A_i} Z_i (Z_i + 1) \equiv \mu \zeta$$

Introduisons ρ_E dans l'équation de Poisson en supposant la symétrie sphérique.

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r\phi)}{dr^2} = \frac{4\pi e^2}{kT} n \chi \phi \equiv \frac{\phi}{r_D^2}$$

Rayon de Debye-Hückel

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 n \chi}}$$

L'équation peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d(r\phi)} \left[\frac{d(r\phi)}{dr} \right]^2 = \frac{r\phi}{r_D^2}$$

En effet

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d(r\phi)}{dr} \frac{d^2(r\phi)}{d(r\phi) dr} = \frac{r\phi}{r_D^2}$$

Intégrons

$$\frac{1}{2} d \left[\frac{d(r\phi)}{dr} \right]^2 = \frac{r\phi}{r_D^2} d(r\phi)$$

donc

$$\frac{d(r\phi)}{dr} = \pm \frac{r\phi}{r_D} + const$$

Choisissons le signe - , et avec $\phi = 0$ pour $r \rightarrow \infty$, $const = 0$.

Intégrons une deuxième fois

$$\ln(r\phi) = -\frac{r}{r_D} + const'$$

On trouve

$$\phi = const' \frac{e^{-r/r_D}}{r}.$$

Si $r_D \rightarrow \infty$, on doit retrouver le potentiel d'une charge isolée $\frac{Ze}{r}$, par conséquent $const' = Ze$.

Le potentiel de la charge Ze avec effet d'écran est donc

$$\phi = \frac{Ze}{r} e^{-r/r_D}.$$

Le potentiel avec écran décroît plus rapidement que le potentiel de la charge isolée.

Le rayon de Debye r_D est le rayon pour lequel l'effet d'écran réduit le potentiel d'un facteur e par rapport au potentiel de la charge isolée.

Remarque :

Dans le système d'unités choisi, on a

$$e^2 = 23.07 \cdot 10^{-20} \text{cm} \cdot \text{erg}.$$

Effets électrostatiques sur la pression du gaz

Considérons les corrections apportées par les effets électrostatiques à la pression du gaz parfait. Nous supposons le gaz de faible densité et de température

suffisamment élevée pour que les développements de la théorie de Debye-Hückel soient valables. Le potentiel avec écran est donc

$$\phi = \frac{Ze}{r} e^{-\frac{r}{r_D}} \simeq \frac{Ze}{r} - \frac{Ze}{r_D},$$

pour des conditions telles que $r_D \gg r$. Le deuxième terme est le potentiel au voisinage de la charge Ze dû à l'interaction de cette charge avec toutes les autres du milieu. L'énergie potentielle de la charge Ze due à l'interaction électrostatique avec toutes les autres charges est donc

$$E_{ES} = -\frac{Z^2 e^2}{r_D}$$

On ne s'intéresse qu'à l'énergie due à l'effet d'écran, *i.e.* due aux écarts à la neutralité. Cette énergie tend vers 0 lorsque $T \rightarrow \infty$.

On note que E_{ES} est négative quel que soit le signe de la charge Ze (Z serait égal à moins 1 pour un électron). Ce fait peut être interprété comme suit : considérons par exemple, une particule de charge Ze dans le plasma. Aussi longtemps que la température du plasma n'est pas infinie et que la densité n'est pas nulle (*i.e.* que r_D n'est pas infini), cette charge va polariser son voisinage immédiat, produisant un excès de charges de signe opposé autour d'elle (la sphère de Debye). Le rayon de ce nuage de charges vaut approximativement r_D et la charge électrique totale à l'intérieur du nuage lui-même (en ne comptant pas la charge de la particule Ze) est approximativement $-Ze$. La charge Ze et son nuage de charge $\sim -Ze$ forment un système lié quasi neutre, avec une énergie négative, puisqu'il faudrait fournir de l'énergie pour les séparer. D'où le fait que toute charge, indépendamment de son signe, est "liée" à son nuage de nuage et donc au plasma dans son ensemble. "L'énergie de liaison" de la charge Ze est, selon ce modèle, la même que celle de deux charges ponctuelles de charge $+Ze$ et $-Ze$ séparées d'une distance r_D .

Cette énergie interne négative va réduire la pression dans le milieu. Soit n_i la concentration des ions de type i et de charge Z_i . La densité d'énergie totale de l'interaction électrostatique est alors

$$u_{ES} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r_D} \sum_i n_i Z_i^2$$

Le facteur 1/2 tient compte du fait que l'énergie d'interaction électrostatique de chaque particule a été comptée deux fois dans la sommation. La pression due à l'interaction électrostatique est donc

$$P_{ES} = \frac{1}{3} u_{ES},$$

car l'interaction se propage à la vitesse c .

$$\begin{aligned} P_{ES} &= -\frac{1}{3} \frac{e^2 \cdot e \sqrt{4\pi n \chi}}{(kT)^{1/2} 2} \underbrace{\sum_i Z_i^2 n_i}_{\simeq n\chi} \\ &= -\frac{1}{3} e^3 \left(\frac{\pi}{kT} \right)^{1/2} (n\chi)^{3/2}. \end{aligned}$$

Notons que

$$n\chi = \frac{\rho}{\mu m_H} \mu \zeta = \frac{\rho \zeta}{m_H}$$

et

$$P_{ES} = -\frac{e^3}{3} \left(\frac{\pi}{kT} \right)^{1/2} \left(\frac{\zeta \rho}{m_H} \right)^{3/2}$$

où

$$\zeta = \sum_i \frac{X_i}{A_i} Z_i (Z_i + 1)$$

La pression électrostatique est négative. Cela exprime le fait que lors d'une compression, les charges fournissent du travail plutôt qu'elles en absorbent.

La pression totale

$$P_{tot} = P_{gas} + P_{rad} + P_{ES} + \dots$$

est réduite par les interactions électrostatiques. Numériquement on a

$$P_{ES} = -0.032 \frac{\rho^{1/2}}{T_6^{3/2}} \mu \zeta$$

avec ρ en g/cm^3 et $T_6 = \frac{T}{10^6} K$.

Dans le Soleil

$$\frac{P_{ES}}{P_{gas}} = -0.015$$

Le rapport ρ/T^3 variant peu à l'intérieur d'une étoile, l'effet relatif des corrections électrostatiques change peu avec la profondeur. Les développements ci-dessus sont corrects tant que $(P_{ES})/P_{gas} \ll 1$. Pour une composition standard ($X = 0.73$, $Z = 0.02$), on vérifie que cela correspond

$$T \gg 1.37 \cdot 10^5 \rho^{1/3}$$

QUESTION : *Montrer que*

$$\frac{P_{ES}}{P_{G.P.}} \sim \frac{1}{\mu^{1/2} M}$$

Utiliser les relations $\rho \sim M/R^3$ et $T \sim \mu M/R$.

L'effet des corrections électrostatiques est important dans les étoiles de séquence principale ayant une petite masse.

QUESTION : *Montrer que le lieu des points dans le plan (T, ρ) où $P_{G.P.} = P_{ES}$ satisfait la relation*

$$T = 1.37 \cdot 10^5 \rho^{1/3}.$$

Diminution du potentiel d'ionisation

Nous avons vu plus haut que l'ion et son nuage électronique forment un système lié. L'énergie d'un électron "libre" dans le nuage sera

$$E_{ES} = -\frac{e^2}{r_D},$$

d'après l'expression vue plus haut. On voit que l'énergie du continu est abaissée au-dessous de la valeur zéro. Il ne sera donc pas nécessaire de fournir autant d'énergie pour produire une ionisation.

Un autre effet intervient aussi : la modification des niveaux liés, car le potentiel n'est pas strictement en $1/r$. Un électron lié à un noyau de charge Ze se déplace dans un potentiel

$$V \simeq \frac{Ze}{r} - \frac{(Z-1)e}{r_D} \quad r \ll r_D$$

Le deuxième terme est le potentiel au voisinage du ion de charge résultante $Z - 1$ dû à l'interaction de cette charge avec toutes les autres charges du milieu. L'énergie du niveau considéré (ici le fondamental) est donc

$$E = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{(Z-1)e^2}{r_D}$$

On voit que l'énergie du niveau lié est élevée d'une quantité $(Z-1)e^2/r_D$, tandis que l'énergie du continu est abaissée à $-e^2/r_D$. Le potentiel effectif d'ionisation résultant de ces deux effets devient

$$I_{eff} = I_0 - \frac{Ze^2}{r_D}$$

I_0 est le potentiel théorique.

L'ionisation est ainsi facilitée lorsque le gaz devient moins parfait du fait de l'augmentation de densité.

Les niveaux excités sont aussi déplacés vers des énergies plus élevées et certains des niveaux liés en laboratoire se trouvent dans le continu. Cela permet de *simplifier le calcul des fonctions de partition* : on n'a plus alors une sommation sur une série infinie. Souvent les fonctions de partition peuvent être estimées par la sommation de seulement quelques termes. Les modifications des potentiels d'ionisation et des différents niveaux excités (de manière différente du fondamental) interviennent de façon très importante dans le calcul des opacités radiatives.

Lorsque la densité d'un milieu est élevée, le rayon de Debye r_D diminue, ce qui réduit le potentiel d'ionisation effectif. A température donnée, au-delà d'une certaine densité, *un élément peut être ionisé par effet de pression*.

QUESTION : *Calculer la relation $\rho(T)$ donnant la limite en densité pour laquelle l'hydrogène est complètement ionisé par effet de pression. (Calcul approximatif). Prendre une énergie d'ionisation*

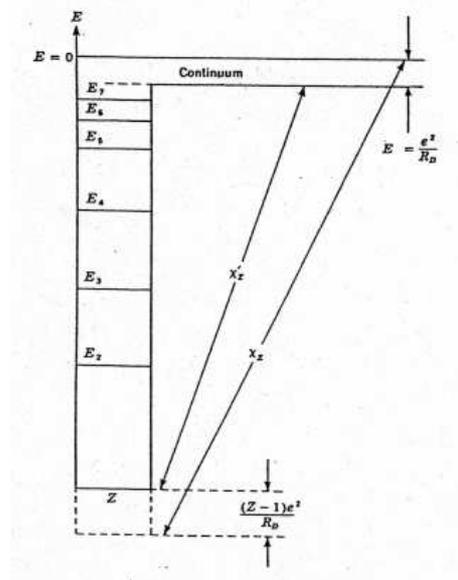


FIG. 5.7 – Effet des inetractions électrostatiques sur les niveaux électroniques des atomes.

de 13.6 eV. Ne pas tenir compte du déplacement en énergie des niveaux électroniques.

Effets électrostatiques dans les milieux dégénérés, cristallisation

Nous avons vu que lorsque la densité d'un gaz parfait augmente, l'effet relatif de l'interaction coulombienne augmente et le gaz devient moins parfait.

Pour un gaz dégénéré, la situation est inverse : le gaz dégénéré devient plus idéal (c.à.d. que ses propriétés correspondent mieux à celles d'une distribution de Fermi), lorsque la densité augmente. En effet, l'énergie significative est l'énergie de Fermi E_F et non pas kT . Or, l'énergie de Fermi croît plus rapidement avec la densité que l'énergie électrostatique. En effet l'énergie de Fermi croît comme $\rho^{2/3}$ (utiliser $E_F = p_F^2/(2m_e)$ et la relation entre p_F et ρ). L'énergie électrostatique liée aux interactions est Ze^2/r_D , comme $r_D \sim 1/\sqrt{\rho}$, on a que $E_{ES} \sim \sqrt{\rho}$. Donc E_F croît plus vite que E_{ES} . Par conséquent aux très hautes densités, il n'y a pas d'effets électrostatiques, tandis qu'il y en a

aux basses densités. L'inverse est vrai dans le cas du gaz parfait.

Dans un milieu dégénéré, seul le gaz électronique est dégénéré ; les ions ne le sont pas. La cristallisation se produit lorsque l'énergie coulombienne l'emporte sur l'agitation thermique des ions : ceux-ci sont alors tenus aux mailles d'un réseau par les forces répulsives entre noyaux (cas des intérieurs de naines blanches en voie de refroidissement).

Des effets de cristallisation peuvent aussi se produire dans les étoiles à neutrons, lorsque les interactions nucléaires l'emportent sur l'énergie du milieu idéal de neutrons dégénérés. Comme indiqué plus haut, ces effets dépendent beaucoup du potentiel nucléaire à très courte distance.

5.6 Les états de la matière dans le plan $\log T$ vs. $\log \rho$

L'équation d'état physique change suivant la région du plan considérée. En un point du plan, on a en général la contribution de plusieurs effets, p. ex. pour le Soleil $P_{\text{tot}} = P_{\text{gaz}} (\text{parfait ou dég.}) + P_{\text{rad}} + P_{\text{électr.}} + \dots$

En général cependant, l'un des effets domine.

Zone du gaz parfait et de la pression de radiation

Le Soleil est situé dans une région de ce plan où la pression du gaz parfait domine. Du centre au bord, diverses limites d'ionisation et de dissociation moléculaire sont traversées (notées pour H , p. ex.). Pour des T plus élevées et des densités faibles, P_{rad} domine. Le lieu où $P_{\text{gaz}} = P_{\text{rad}}$ est donné par

$$\frac{k}{\mu m_H} \rho T = \frac{1}{3} a T^4,$$

c'est-à-dire

$$T = \left(\frac{3k}{\mu m_H a} \right)^{1/3} \rho^{1/3}$$

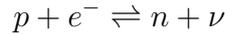
Lorsque l'énergie des photons $E = h\nu = kT$ est supérieure à l'énergie de seuil de l'électron de 0.51 MeV, on a

$$\gamma + \gamma \rightleftharpoons e^+ + e^- \quad T = 5.9 \cdot 10^9 \text{ K}$$

Remarque

De fait, cette réaction s'amorce à des températures nettement inférieures à la température de seuil, à cause de la distribution d'énergie des photons.

Lorsque les photons et les électrons en équilibre ont une énergie supérieure à celle correspondant à la différence de masse entre neutrons et protons, on a l'équilibre



pour

$$\begin{aligned} E &\simeq (m_N - m_P) c^2 = 939.55 - 938.26 \\ &= 1.29 \text{ MeV} \\ &\text{soit } T \simeq 1.5 \cdot 10^{10} \text{ K} \end{aligned}$$

Zone des milieux dégénérés (domaine typique des naines blanches)

Le lieu où $P_{gaz} = P_{dég}$ est donnée par

$$\frac{k}{\mu m_H} \rho T = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}$$

c'est-à-dire

$$T = K_1 \frac{\mu m_H}{k} \frac{\rho^{2/3}}{\mu_e^{5/3}}$$

On remarquera bien que la pente de cette limite est **2/3** dans le diagramme $\log T$ vs. $\log \rho$. Ce fait a des conséquences capitales pour l'évolution stellaire.

La matière de notre environnement terrestre se trouve généralement dans la zone dégénérée N.R. ou partiellement dégénérée. Aux basses températures, les effets électrostatiques l'emportent et il y a cristallisation.

Aux densités très élevées, la dégénérescence devient relativiste. Le lieu où $P_{dég. N.R.} = P_{dég. R}$ est défini par

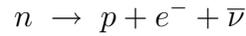
$$K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} = K_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}$$

Pour $\mu_e = 2$, ce lieu est défini par $\log \rho \simeq 6.6$.

Lorsque l'énergie de Fermi des électrons est supérieure à la différence $(m_N - m_P)c^2 = 1.29 \text{ MeV}$, on a la réaction de neutronisation



C'est la réaction inverse de la désintégration β



La neutronisation est due au fait que l'état "lié" neutron a une énergie inférieure à l'état $p + e^-$, lorsque l' e^- a une très grande énergie cinétique. Ce processus se produit dans les étoiles à neutrons, pour des noyaux très riches en n . L'électron relativiste doit avoir une impulsion

$$p_F = \frac{1.29 \text{ MeV}}{c} = \frac{1.29 \cdot 1.602 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{10}} = 6.89 \cdot 10^{17} \text{ C G S}$$

Cela se produit pour une densité

$$\begin{aligned} \rho &= \mu_e \frac{8\pi}{3} \frac{m_H}{h^3} p_F^3 = \frac{16\pi}{3} \frac{1.67 \cdot 10^{-24} (6.89 \cdot 10^{-17})^3}{(6.626 \cdot 10^{-27})^3} \\ &= 3.15 \cdot 10^7 \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

Brèves remarques sur les densités très élevées

Entre les densités d'environ 10^6 et 10^{15} kg/dm^3 , divers processus se produisent, qui se retrouvent dans la structure d'une étoile à neutrons. Nous les mentionnons brièvement, sans calculer les propriétés physiques particulières de ces milieux.

- A partir de $\rho = 8.3 \cdot 10^7 \text{ kg/dm}^3$, l'énergie des électrons devient suffisante pour que ces électrons puissent être capturés par les protons contenus dans les noyaux d'atomes. C'est l'inverse de la désintégration β et on a $e^- + p \rightarrow n + \nu$. Des noyaux très riches en neutrons et qui seraient impossibles en laboratoire commencent à apparaître : $Z \sim 50$, $A \sim 200$.

- Vers $\rho = 4.3 \cdot 10^{11} \text{ kg/dm}^3$, la stabilité des noyaux avec $N \gg Z$ diminue tellement qu'ils commencent à perdre leurs neutrons. C'est le Neutron Drip Point.
- Vers $5 \times 10^{13} \text{ kg/dm}^3$, les noyaux qui subsistent se dissolvent pour former un milieu composé de neutrons dégénérés avec quelques pourcents d'électrons et de protons. Au-dessus de $\rho = 3 \times 10^{14} \text{ kg/dm}^3$, l'équilibre se déplace au profit des muons (quand $E_{\text{électrons}} > \text{masse au repos du muon}$) et des hyperons (quand $E_{\text{neutrons}} > \text{différence de masse entre neutrons et hyperons}$).

Ces transitions se retrouvent dans la structure intérieure d'une **étoile à neutrons** $M \simeq 1 M_{\odot}$ et $R \simeq 10 \text{ km}$.

Les propriétés physiques du milieu, et par conséquent la structure des étoiles à neutrons, dépendent très fortement du potentiel nucléaire à très courte distance. Aussi, des déviations importantes peuvent se produire par rapport à un gaz idéal de neutrons dégénérés.

Tous les effets physiques étudiés dans ce chapitre (dégénérescence N.R., dégénérescence R., effets électrostatiques, cristallisation) modifient évidemment les propriétés thermodynamiques du milieu (p. ex. C_v , C_p , Γ_i , $i = 1 \text{ à } 3$). Ces effets sont étudiés par exemple dans *Cox and Giuli 1968, Principles of stellar structure*.

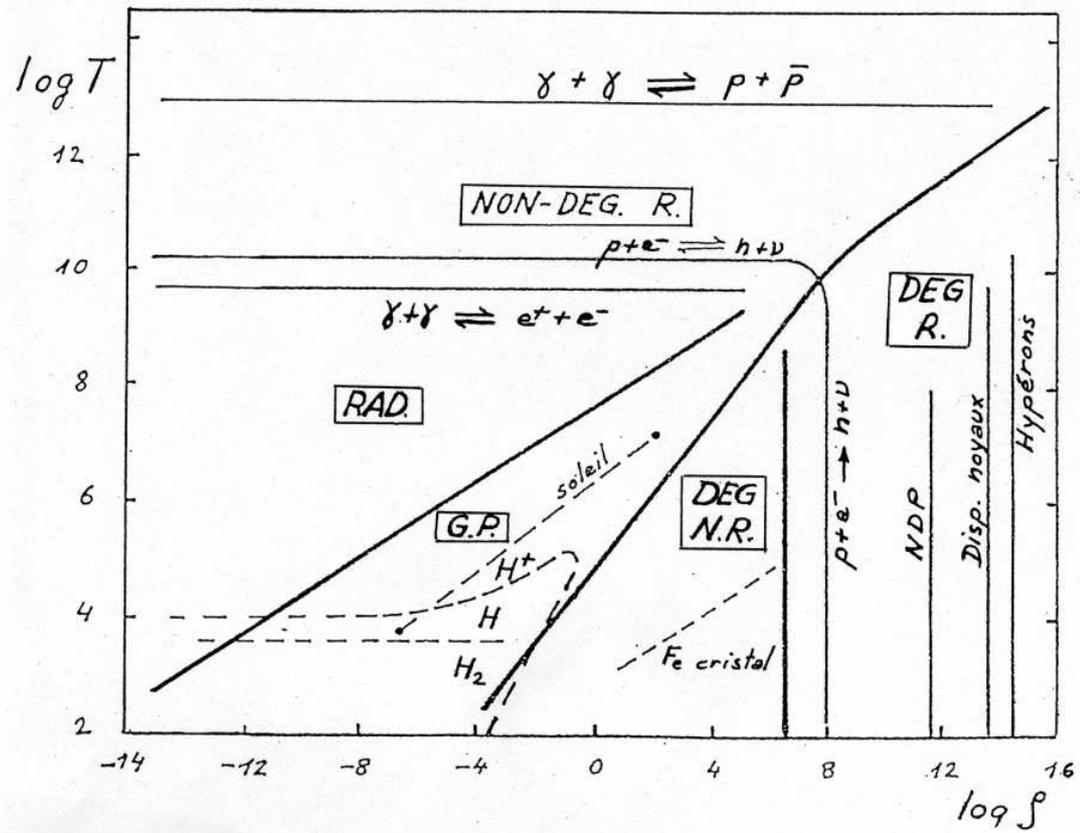


FIG. 5.8 – Origine de la contribution dominante à la pression dans le plan $\lg \rho_c$ versus $\lg T_c$.

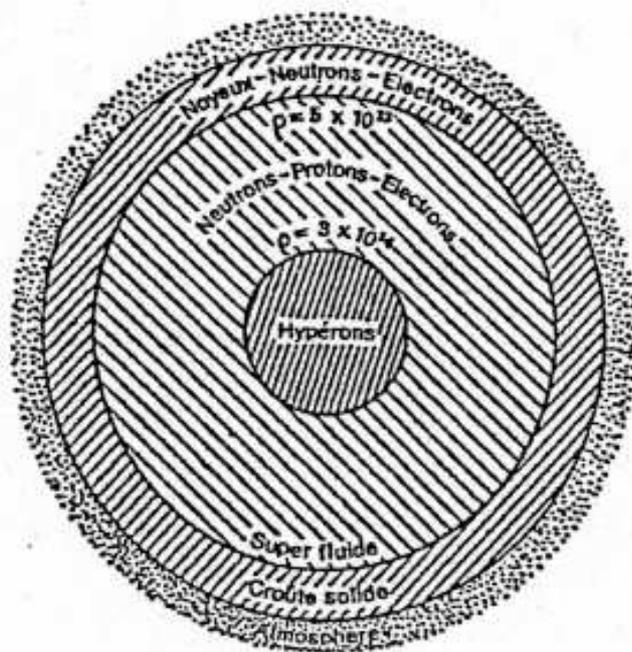


FIG. 5.9 – Structure schématique d'une étoile à neutrons.

Chapitre 6

Les réactions nucléaires

Les réactions nucléaires sont un processus essentiel de l'évolution stellaire : d'une part la fusion d'éléments légers en éléments plus lourds libère de l'énergie cinétique, réchauffe le milieu et compense l'énergie rayonnée par la surface aux dépens des masses des particules entrant en interaction¹ d'autre part elles transforment la matière, effectuant ainsi la synthèse des éléments (nucléosynthèse) dans l'Univers. La synthèse de l'hélium s'est opérée dans le Big-Bang (nucléosynthèse cosmologique). La synthèse des éléments plus lourds s'effectue principalement dans les étoiles massives et les produits de la synthèse nucléaire sont éjectés par les vents stellaires et les supernovae. Dans ce chapitre, nous établirons des expressions très utiles en astrophysique, sans étudier en détail la physique des noyaux vue au cours de *Physique nucléaire*.

6.1 Définitions générales

Cinématique

La discussion qui suit se restreint au cas non relativiste, approprié aux faibles énergies cinétiques présentes dans les intérieurs stellaires.

¹La condition selon laquelle, la puissance émise au centre de l'étoile compense la puissance rayonnée par la surface détermine un état stationnaire de la structure de l'étoile. Cependant cette situation ne peut être strictement stationnaire car les réactions qui libèrent l'énergie modifient également la composition chimique de l'intérieur de l'étoile. Le lent changement de la composition de l'étoile est responsable de son évolution.

Soient deux particules de masse m_1 et m_2 et de vitesse non relativiste \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . **La vitesse \vec{V} du centre de masse** est donnée par la loi de conservation de la quantité de mouvement

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V} \rightarrow \vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

La quantité de mouvement de la particule 1 par rapport au centre de masse est $m_1(\vec{v}_1 - \vec{V}) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu\vec{v}$, où μ est **la masse réduite**, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, et $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ est **la vitesse relative** de m_1 vue de m_2 .

La quantité de mouvement de m_2 par rapport au centre de masse est $m_2(\vec{v}_2 - \vec{V}) = -\mu\vec{v}$. Ainsi dans le référentiel lié au centre de masse, la quantité de mouvement totale est nulle. La conservation de la quantité de mouvement totale implique alors que \vec{V} reste constante et que la quantité de mouvement dans le référentiel du centre de masse (RDCM) est nulle avant et après la collision.

Energie d'une réaction

Avant la collision, **l'énergie cinétique** est

$$1/2 m_1 \vec{v}_1^2 + 1/2 m_2 \vec{v}_2^2 = 1/2 (m_1 + m_2) \vec{V}^2 + 1/2 \mu \vec{v}^2$$

Le premier terme à droite est l'énergie cinétique du CDM, qui reste constante lors d'une collision (on suppose ici que la masse totale des particules change suffisamment peu pour ne pas affecter significativement cette quantité). Le second terme représente la portion de l'énergie cinétique du système disponible pour éventuellement contrer toute force tendant à empêcher le rapprochement des deux particules. Il s'agit de l'énergie cinétique dans le RDCM.

Ces formules non relativistes ne sont applicables aux réactions nucléaires que si la masse combinée des particules finales est égale à la masse combinée des particules initiales. Cependant, lors d'une réaction nucléaire exothermique de l'énergie est libérée aux dépens de la masse selon la formule d'Einstein $\Delta M c^2$ où ΔM est la différence entre la masse totale initiale et finale. Dans les réactions nucléaires à faible énergie, on a que $\Delta M/M \sim 10^{-2} - 10^{-4}$ de telle manière que l'hypothèse de masse constante est satisfaite à mieux de 1%. Nous pouvons donc considérer que l'énergie cinétique du CDM reste inchangée par la réaction, alors que l'énergie cinétique dans le RDCM, elle, augmente ou diminue, selon que la masse finale est inférieure ou supérieure à la masse initiale.

La conservation de l'énergie totale pour une réaction du type



peut s'écrire

$$E_{aX} + (M_a + M_X)c^2 = E_{bY} + (M_b + M_Y)c^2$$

où E_{aX} , E_{bY} sont respectivement l'énergie cinétique dans le référentiel du CDM de a , X et de b , Y . Les M_i étant les masses des noyaux participant à la réaction. Le second terme de part et d'autre de l'égalité exprime le fait que la somme des masses au repos avant et après la réaction ne sont pas nécessairement les mêmes.

Il est possible de remplacer les **masses nucléaires** par **des masses atomiques** : en effet la charge électrique est conservée, donc le même nombre de masses au repos d'électrons peut être ajouté de part et d'autre. Il y a cependant une petite différence due à l'énergie de liaison des électrons qui n'est pas tout à fait la même des deux côtés de l'égalité. Cependant, la différence entre ces énergies de liaison est négligeable comparée aux différences entre les masses nucléaires. Typiquement, l'utilisation des masses atomiques au lieu des masses nucléaires introduit une erreur de l'ordre de quelques eV. Comme le nombre de nucléons est aussi conservé, le poids atomique, défini comme l'entier le plus proche de la masse exprimée en unités de masses atomiques (uma), est le même des deux côtés de l'égalité. Cette égalité sera donc toujours valable si de chaque côté, on soustrait le poids atomique multiplié par une unité de masse. Les masses deviennent alors des **excès de masses atomiques** définis par

$$\Delta M_{AZ} = (M_{AZ} - AM_u)c^2 = 931.478(M_{AZ} - A)\text{Mev}$$

où M_u est l'unité de masse atomique (1/12 de la masse de l'atome de ^{12}C neutre) et M_{AZ} est la masse de l'élément AZ en uma. ΔM est négatif pour un noyau stable. Avec ces définitions, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$E_{aX} + (\Delta M_a + \Delta M_X) = E_{bY} + (\Delta M_b + \Delta M_Y).$$

L'énergie libérée par une réaction, Q , est donnée par

$$Q = (\Delta M_a + \Delta M_X) - (\Delta M_b + \Delta M_Y) = E_{bY} - E_{aX}.$$

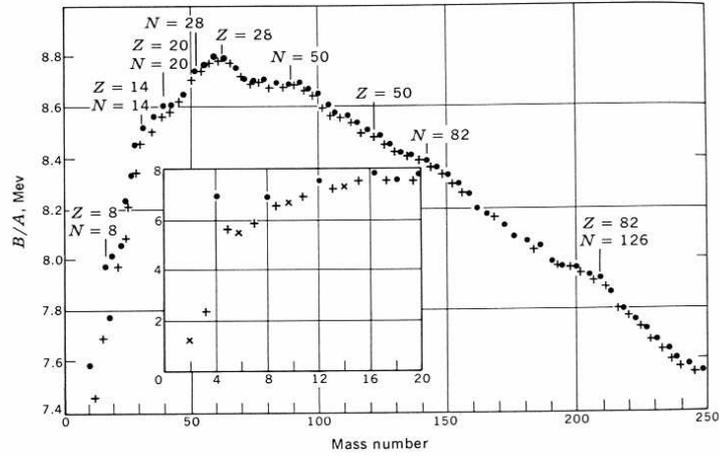


FIG. 6.1 – *Energie de liaison par nucléon.*

En général la valeur de Q (MeV) donnée en astrophysique ne comprend pas l'énergie emportée par les neutrinos, ceux-ci ne participant pas au transfert. L'énergie de liaison du noyau (A, Z), E_l , est donnée par

$$E_l = (Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z))c^2 = Z\Delta m_p + (A - Z)\Delta m_n - \Delta M(A, Z).$$

QUESTION : *Montrer que $Q = E_l(Y) + E_l(b) - E_l(X) - E_l(a)$.*

Il est intéressant de regarder la figure donnant l'énergie de liaison par nucléon en fonction du nombre de masse.

Les réactions de fusion thermonucléaire qui dégageront le plus d'énergie par nucléon seront celles faisant intervenir les noyaux les plus légers. Ceci explique en grande partie la grande durée de la phase de combustion de l'hydrogène par rapport aux autres phases de combustion nucléaire.

Les noyaux au-delà du pic du fer ne peuvent être synthétisés à partir de réactions de fusion exothermiques.

Taux de réactions

Supposons que les particules X soient immobiles et bombardées par un flux uniforme de particules "a" (situation qui correspond à celle des expériences nucléaires de laboratoire).

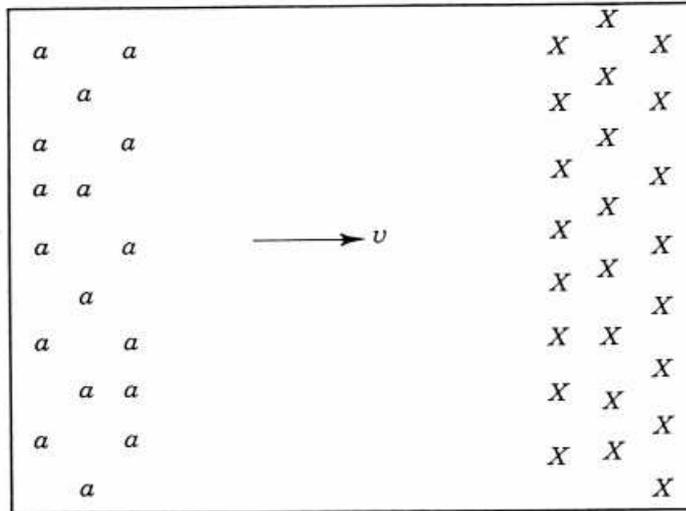


FIG. 6.2 – Flux de particule a sur une cible de particules X .

La section efficace est alors définie par

$$\sigma(\text{cm}^2) = \frac{\text{nbre de réactions par noyau } X \text{ et par sec.}}{\text{nbre de particules incidentes par } \text{cm}^2 \text{ et par sec.}}$$

Cette définition définit en réalité $\sigma(v)$ où v est la vitesse relative des particules a par rapport à X . L'unité utilisée est le barn = 10^{-24} cm^2 (=100 fermi² soit environ la moitié de la surface projetée d'un noyau d'uranium).

Supposons que les noyaux X constituent un gaz de densité uniforme N_X . Le taux de réaction par unité de volume est alors donné par le produit de σN_X et du flux de particules a . Si le flux de particules a est dû à une translation à vitesse v d'un gaz de densité uniforme N_a , alors le flux est simplement vN_a et le taux de réactions par unité de volume est égal à

$$r_{aX} = \sigma(v)vN_aN_X.$$

Dans un mélange de gaz à l'équilibre thermodynamique, il existe une distribution des vitesses relatives $\phi(v)$. Définissons-la telle que $\int \phi(v)dv = 1$. Le taux de réaction total par unité de volume s'écrit alors

$$r_{aX} = N_aN_X \int_0^\infty v\sigma(v)\phi(v)dv = N_aN_X \langle \sigma v \rangle. \quad (6.1)$$

Cette expression n'est valable que si les particules a et X sont différentes. Dans ce cas en effet $N_a N_X$ est le nombre total de paires de particules (a, X) par unité de volume. Si les particules sont identiques, alors le nombre total de paires de particules est $1/2 N_a^2$. Ce point peut être pris en compte en écrivant

$$r_{aX} = (1 + \delta_{aX})^{-1} N_a N_X \langle \sigma v \rangle, \quad (6.2)$$

où δ_{aX} est le symbole de Kronecker (=1 si $a = X$, 0 sinon). Par la suite, nous appellerons $\lambda_{aX} = \langle \sigma v \rangle$ le taux de réaction par paires de particules.

QUESTION : *faisons l'expérience de pensée suivante. Supposons $a = X$. Considérons que la moitié des atomes a soient immobiles et que l'autre moitié ait un mouvement de translation avec la vitesse v . La densité de la cible est $1/2 N_a$, le flux est égal à $1/2 N_a v$ et le taux de réaction vaut $r = 1/4 N_a^2 v \sigma(v)$. Obtient-on le même résultat à l'aide de la formule (6.2) ?*

Expression de $\phi(v)$

A l'équilibre thermodynamique, les différentes sortes de noyaux ont une distribution des vitesses décrite par une distribution de Maxwell-Boltzmann (MB). On peut montrer que la distribution des vitesses relatives est aussi du type MB et peut s'écrire

$$\phi(v) dv = \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\mu v^2}{2kT} \right) 4\pi v^2 dv.$$

Le taux de réaction nucléaire par paire de particules s'écrit alors

$$\lambda_{aX} = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \sigma(v) \exp \left(-\frac{\mu v^2}{2kT} \right) dv.$$

Temps de vie d'une particule

La variation en valeur absolue du nombre de particules X due à des interactions avec les particules a est

$$\left(-\frac{\partial n_X}{\partial t} \right)_a.$$

Le temps de vie $\tau_a(X)$ des particules X bombardées par a est défini par

$$\left(-\frac{\partial n_X}{\partial t} \right)_a \equiv \frac{n_X}{\tau_a(X)}.$$

On a aussi que

$$\left(-\frac{\partial n_X}{\partial t}\right)_a = (1 + \delta_{aX})r_{ax},$$

en effet si $a = X$ chaque fois qu'une réaction se produit, deux particules disparaissent. Donc

$$\tau_{aX} = \frac{n_X}{(1 + \delta_{aX})r_{aX}} = \frac{1}{n_a \lambda_{aX}},$$

c'est-à-dire

$$\tau_{aX} = \frac{A_a m_H}{\rho X_a \lambda_{aX}}$$

QUESTION : *Lorsqu'un élément X est détruit par plusieurs réactions, montrer que le temps de vie totale est donné par*

$$\frac{1}{\tau(X)} = \sum \frac{1}{\tau_i(X)}.$$

Débit d'énergie ϵ

Le débit d'énergie ϵ est la puissance produite par unité de masse. On a que

$$\epsilon = \frac{QN_a N_X \lambda_{aX}}{\rho(1 + \delta_{aX})}$$

où Q est l'énergie libérée par une réaction ($Q(\text{erg}) = 1.6022 \cdot 10^{-6} Q(\text{Mev})$) En introduisant les concentrations partielles

$$n_a = \frac{\rho X_a}{A_a m_H},$$

on a que

$$\epsilon = \frac{Q\rho X_a X_X \lambda_{aX}}{A_a A_X m_H^2 (1 + \delta_{aX})},$$

où X_a est la fraction de masse de l'élément a , A_a est son poids atomique.

Remarque

Dans la pratique, on utilise en général des valeurs pour $N_{AV} \lambda_{aX}$ ($= \frac{\lambda_{aX}}{m_H}$) tabulées, voir par exemple les taux de la compilation NACRE à la page Web : <http://pntpm.ulb.ac.be/nacre.htm>.

Les taux doivent être corrigés de l'effet d'écran (cf. fin de ce chapitre).

6.2 Réactions non-résonnantes

Les réactions nucléaires au centre des étoiles ne peuvent se produire que parce que certaines particules (les plus énergétiques) peuvent pénétrer les barrières coulombiennes qui les séparent. L'énergie associée à cette barrière coulombienne est égale à

$$V = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} = \frac{1.44 Z_1 Z_2}{R} \text{ [Mev]}$$

avec R exprimé en *fermi* (10^{-13} cm). L'énergie cinétique disponible correspond à

$$kT = 8.62 \cdot 10^{-8} T \text{ [kev]}.$$

Pour des températures de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines de millions de degrés, l'énergie cinétique moyenne des particules est plusieurs ordres de grandeur inférieures à celle de l'énergie de la barrière coulombienne.

QUESTION : *Pour que deux protons interagissent par le biais des interactions fortes, ils doivent se rapprocher à environ 2 fermi l'un de l'autre. Montrer alors qu'ils doivent posséder une énergie cinétique dans le RDCM de 700 kev (on suppose qu'il n'y a pas d'effet tunnel). Quelle est l'énergie cinétique moyenne des protons dans un gaz à l'équilibre thermodynamique, ayant une température de 10 millions K ? Qu'en conclure ?*

L'exercice ci-dessus, nous montre qu'au centre du Soleil, l'énergie moyenne des protons est de loin pas suffisante pour permettre aux interactions fortes d'agir. Mais deux effets doivent être pris en compte qui vont permettre aux réactions nucléaires de se produire :

1) $\phi(v)$ a une queue vers les hautes vitesses, même si cette fonction décroît rapidement avec v .

2) L'effet tunnel.

La section efficace $\sigma(v)$ ou $\sigma(E)$ (où E est l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse) peut s'écrire comme le produit de trois quantités : les deux premières sont des fonctions dépendant très fortement de l'énergie et décrivent des processus non directement liés à la structure nucléaire des noyaux proprement dit. La troisième quantité décrit la dépendance en énergie de tous les effets proprement liés à la structure nucléaire des réactants. Dans

le cas de réactions nucléaires **non résonantes**, il s'agit en général d'une fonction qui au moins sur un intervalle donné d'énergie varie peu avec l'énergie. Voici ces trois termes :

1) Le facteur de pénétration : Gamow fut le premier à montrer que la probabilité pour que deux particules de charges Z_1 et Z_2 , en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre avec une vitesse v , pénètrent la barrière coulombienne, est proportionnelle au facteur

$$f_p \propto \exp -\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v},$$

il s'agit du facteur de pénétration.

QUESTION : Montrer que $f_p = e^{-b/\sqrt{E}}$, avec $b = 31.82 Z_1 Z_2 \sqrt{A}$ ($\text{kev}^{1/2}$) et $A = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$.

2) L'interaction entre deux particules est toujours proportionnelle à un facteur géométrique $\pi\lambda^2$, où λ est la longueur d'onde de de Broglie

$$\pi\lambda^2 \propto \left(\frac{1}{p}\right)^2 \propto \frac{1}{E}.$$

Les quantités 1) et 2) sont fortement dépendantes de E aux basses énergies.

3) On définit la troisième composante $S(E)$ par

$$S(E) = \sigma(E) E \exp \frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}.$$

Ainsi $\sigma(E) = S(E)\pi\lambda^2 f_p = S(E)/E \exp -b/\sqrt{E}$.

La Figure montre les résultats expérimentaux de la section efficace de la réaction ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ en fonction de l'énergie dans le centre de masse (1 barn = 10^{-24} cm²). On peut voir sur cette figure que σ décroît de plusieurs ordres de grandeurs entre 150 et 50 kev. Vers 50 kev, σ décroît d'environ 2 ordres de grandeur chaque 20 kev. A faible énergie, la section efficace décroît très fortement avec l'énergie. Cette décroissance très rapide à faible énergie est due presque entièrement au facteur de pénétration. Le facteur S représenté en-dessous montre une très faible dépendance avec l'énergie.

B) Le pic de Gamov

La section efficace par paire de particules peut s'écrire

$$\lambda = \langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \sigma(E)v(E)\psi(E)dE,$$

où $\psi(E)dE = \phi(v)dv$,

$$\lambda = \left(\frac{8}{\mu\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right) dE.$$

Le comportement de l'intégrand est largement dominé par l'exponentielle. La figure 4 montre schématiquement la forme de ce terme exponentiel. La contribution la plus importante à l'intégrale provient de valeurs de l'énergie telles que ce facteur exponentiel soit proche du maximum. La plupart des réactions nucléaires stellaires se produisent sur un intervalle de températures tel que sur cet intervalle (assez étroit) $S(E)$ peut être considéré comme quasiment constant (en dehors bien sûr des résonances). Une bonne approximation de λ peut être obtenue en remplaçant $S(E)$ par sa valeur estimée à l'énergie E_0 où le maximum du facteur exponentiel est atteint (E_0 est appelée, l'énergie de Gamow).

$$\lambda = \left(\frac{8}{\mu\pi}\right)^{1/2} \frac{S(E_0)}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right) dE.$$

QUESTION : *Montrer que $E_0 = \left(\frac{bkT}{2}\right)^{2/3} = 1.220(Z_1^2 Z_2^2 AT_6^2)^{1/3}$ keV.*

Pour $T \sim 10^7$ et pour des noyaux légers, $E_0 = 10 - 30$ keV, alors que $kT \sim 1$ keV. Le facteur de pénétration favorise la partie à haute énergie de la distribution de Boltzmann.

Les énergies contribuant à l'intégrand ont des valeurs ne s'écartant que d'une dizaine de keV de E_0 . Cet intervalle d'énergie est très petit comparé à l'énergie de séparation moyenne des états nucléaires quasistationnaires. Ceci explique pourquoi, en dehors des résonances, le facteur $S(E)$ qui contient les effets des forces nucléaires, peut être considéré comme variant peu avec l'énergie sur cet intervalle.

La mesure expérimentale d'une section efficace consiste à obtenir des informations sur le facteur $S(E)$ dans l'intervalle d'énergie autour du pic de

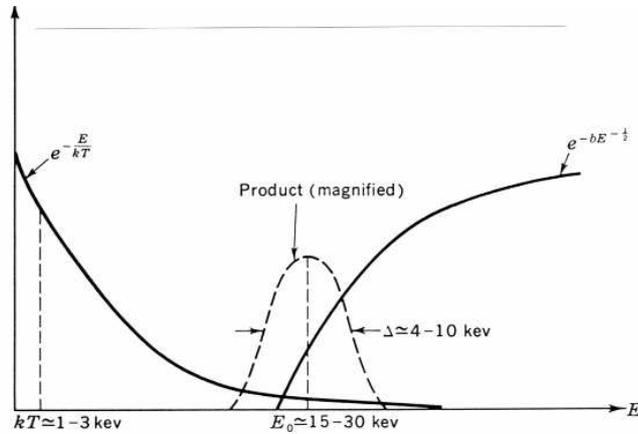


FIG. 6.3 – Le pic de Gamow résulte de la multiplication de la distribution de Maxwell- Boltzmann avec le facteur de pénétration de Gamov.

Gamow. Il n'est pas toujours possible de mesurer directement ce facteur à basse énergie. Il faut dans ce cas extrapoler les mesures obtenues à hautes énergies, opération délicate, où interviennent à la fois les données expérimentales et des considérations théoriques (voir Fig. 6.4).

C) Expression approchée du taux de réaction

Pour calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \exp -\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}} dE.$$

on procède souvent numériquement. On peut toutefois approcher cette intégrale de manière analytique de la manière suivante. Posons $f(E) = \exp -\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}$ et remplaçons l'intégrand par une courbe de Gauss centrée en E_0 , de hauteur $f(E_0)$ et de demi-largeur ΔE (en $E_0 + \Delta E$, la valeur de $f(E)$ est réduite par un facteur e). Soit

$$f(E) = e^{-\tau} e^{-\left(\frac{E-E_0}{\Delta E}\right)^2}$$

Développons $f(E)$ autour de E_0

$$f(E) = f(E_0) + \underbrace{f'(E_0)}_{=0} (E - E_0) + \frac{f''(E_0)}{2} (E - E_0)^2$$

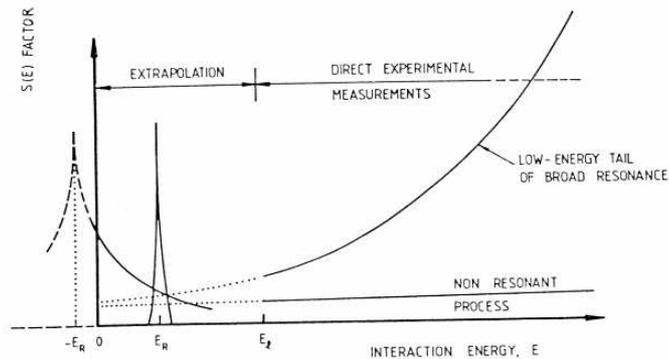


FIG. 6.4 – Les mesures sont faites à haute énergie. Il est nécessaire d'extrapoler les valeurs des taux dans le domaine d'énergie de Gamov.

Si $f(E_0 + \Delta E) \simeq 0$ en ΔE , on obtient

$$\Delta E \cong \left(\frac{-2f}{f''} \right)_{E_0}^{1/2} = \left(\frac{4}{3} E_0 kT \right)^{1/2}$$

QUESTION : A vérifier (Utiliser le fait que $f'(E_0) = 0$).

On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(E) dE &\simeq e^{-\tau} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{E-E_0}{\Delta E}\right)^2} dE \\ &= \frac{1}{2} e^{-\tau} \sqrt{\pi} \Delta E \end{aligned}$$

Le produit $\langle \sigma v \rangle$ devient

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m_{red}} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} S(E_0) \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\tau} \left(\frac{4}{3} E_0 kT \right)^{1/2}$$

En explicitant E_0 , on a

$$\langle \sigma v \rangle \sim S(E_0) e^{-\tau} \tau^2 \frac{1}{A Z_a Z_X}$$

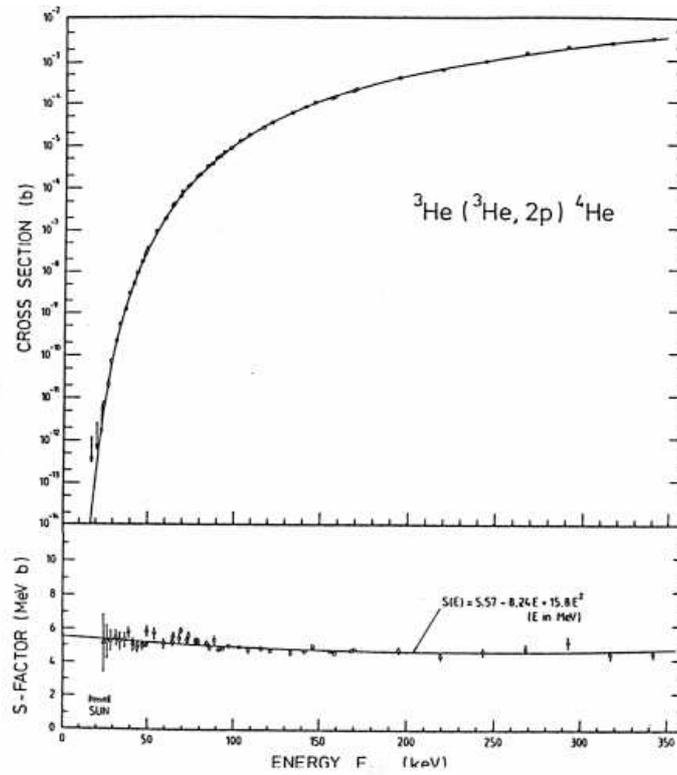


FIG. 6.5 – Pour cette réaction des mesures du facteur S ont pu être réalisées dans le domaine d'énergie de Gamov.

En exprimant $S(E_0)$ en $\text{barn} \cdot \text{keV}$ ($1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$), on a finalement

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{7.21 \cdot 10^{-19}}{A Z_a Z_X} S(E_0) \tau^2 e^{-\tau}$$

c'est-à-dire une dépendance vis-à-vis de T de la forme

$$\langle \sigma v \rangle \sim \frac{1}{T^{2/3}} e^{-\text{const}/T^{1/3}}$$

Le taux des réactions est

$$r_{ax} = n_a n_x \frac{\lambda_{ax}}{(1 + \delta_{ax})}$$

$$r_{ax} = \frac{2.62 \cdot 10^{29} \rho^2 X_a X_X}{(1 + \delta_{aX}) A Z_a Z_X A_a A_X} S(E_0) \tau^2 e^{-\tau}$$

et le débit d'énergie est de la forme

$$\epsilon = \frac{r_{ax} Q(\text{erg})}{\rho} \sim \text{fact.} \frac{Q \rho X_a X_X}{(1 + \delta_{aX}) T_6^{2/3}} e^{\frac{-42.48 (Z_a^2 Z_X^2 A)^{1/3}}{T_6^{1/3}}}$$

Dans la pratique, on utilise les expressions tabulées. On ajoute encore en général au terme principal calculé ci-dessus, des termes correctifs pour tenir compte du fait que $S(E)$ n'est pas constant et que l'on a approximé l'expression du *pic de Gamov*.

Des taux de réactions nucléaires peuvent être trouvées dans les références suivantes : Caughlan and Fowler 1988 Atomic Data Nuc. Data Tables 40, 283. Dans cette référence, les taux $N_{AV} \lambda_{aX}$ où N_{AV} est le nombre d'Avogadro, sont donnés sous la forme de développements analytiques, fonction de la température. Une compilation récente de taux de réactions nucléaires utiles en astrophysique est accessible sur le Web à l'adresse suivante :

<http://isotopes.lbl.gov/isotopes/astro.html>

Remarque

Souvent, dans un domaine de T limité, on peut pour des estimations simples représenter ϵ par une expression du type

$$\epsilon = \epsilon_0 \rho T^\nu \quad \nu = \left(\frac{\partial \ln \epsilon}{\partial \ln T} \right)_\rho$$

QUESTION : Montrer que $\nu = \frac{\tau-2}{3}$.

6.3 L'effet d'écran

Dans un milieu suffisamment dense, chaque noyau est entouré d'un nuage d'électrons qui atténuent la répulsion coulombienne entre noyaux. Cet effet, qui facilite la pénétration des barrières de potentiels, est l'effet d'écran (electron screening). Le potentiel au voisinage d'un noyau de masse A_i est

$$\phi = \frac{Ze}{r} e^{-r/r_D}$$

avec le rayon de Debye r_D .

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 n \chi}} \quad n : \text{ concentration moyenne}$$

$$n = \rho / (\mu m_H)$$

χ est une charge effective.

$$\chi = \mu \sum \frac{X_i}{A_i} Z_i (Z_i + 1) \equiv \mu \zeta$$

L'énergie potentielle entre deux noyaux 1 et 2 devient

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2}{r} e^2 e^{-r/r_D}$$

$$e^2 = 23.07 \cdot 10^{-20} \text{ cm} \cdot \text{erg}$$

Valeurs numériques

par exemple, pour

$$T = 10^7 K, \quad \rho = 10^2, \quad \zeta = 1, \quad Z_1 Z_6 = 6$$

on a

$$r_D/r_0 \simeq 10^2$$

r_0 est le rayon du noyau.

Dans le domaine ρ, T des étoiles de séquence principale, le rayon de Debye $\gg r_0$.

Développons donc au 1er ordre

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_D}$$

Dans le calcul du facteur de pénétration $P_\ell(E)$, dû à l'effet tunnel, le terme important qui apparaît (cf. cours de *Mécanique quantique*) est la différence $V(r) - E$, entre l'énergie potentielle des noyaux et l'énergie relative des particules. On a

$$V(r) - E = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \left(E + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_D} \right)$$

Tout se passe donc comme si l'énergie cinétique relative de la particule incidente était augmentée de

$$V_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_D}$$

On a donc

$$\sigma_{\text{écran}}(E) \simeq \sigma_{\text{sans écran}}(E + V_0)$$

Calculons le produit $\langle \sigma v \rangle$

$$\langle \sigma v \rangle_{\text{écran}} = \int_0^\infty \phi(E) \sigma_{\text{écran}}(E) v(E) dE$$

avec

$$\phi(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-E/kT} E^{1/2}$$

Posons $E' = E + V_0$

$$\langle \sigma v \rangle_{\text{écran}} = \int_{V_0}^\infty \phi(E' - V_0) v(E' - V_0) dE'$$

$$\begin{aligned} \phi(E' - V_0) \cdot v(E' - V_0) &= \text{const}(E' - V_0) e^{-E'/kT} \cdot e^{V_0/kT} \\ &\simeq \text{const} E' e^{-E'/kT} e^{V_0/kT} \end{aligned}$$

car V_0 est faible par rapport à E_0 , énergie efficace de réaction.

Donc

$$\langle \sigma v \rangle_{\text{écran}} = \langle \sigma v \rangle_{\text{sans écran}} \cdot f, \quad f = e^{V_0/kT}$$

f : facteur de screening

Numériquement :

$$\frac{V_0}{kT} = 0.188 Z_1 Z_2 \frac{(\zeta\rho)^{1/2}}{T_6^{3/2}} \quad T_6 = \frac{T}{10^6}$$

Les développements ci-dessus s'appliquent au cas où

$$\frac{V_0}{kT} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_D kT} \ll 1$$

c'est-à-dire lorsque V_0 est faible par rapport à l'énergie des particules. Ce cas est dit "*weak screening*". Il s'applique pour $\rho \sim 10^4 \text{ g/cm}^3$. Le facteur f est voisin de l'unité. Pour $\rho \sim 10^6 \text{ g/cm}^3$, on a en général le cas de "*strong screening*", qui demande d'autres approximations. L'effet d'écran devient si fort que l'on a des réactions dont le taux, dépendant surtout de ρ , pourrait être très augmenté (réactions pycno-nucléaires). Cependant, les réactions nucléaires sont fortement contrariées par la cristallisation qui se produit en général dans de telles conditions.

6.4 Les réactions résonnantes (en lecture)

Ce qui suit a été scanné d'un polycopié intitulé "Astrophysique nucléaire" (G. Meynet, 1994). La numérotation des sections n'a pu être modifiée et n'est donc pas compatible avec la numérotation du présent document.

5.6 Expression de $\sigma(v)$, cas des réactions résonnantes

Dans ce qui suit, nous supposons que les interactions de chaque nucléon avec le reste du noyau sont bien approximées par un potentiel sphérique $V(r)$ (modèle en couches du noyau).

A) Les niveaux d'excitation d'un noyau

Le noyau, comme l'atome, possède différents états d'excitation. Chacun de ces états peut être caractérisé par une série de nombres :

- 1) L'énergie E_i du niveau.
- 2) La largeur Γ_i ou le temps de vie τ_i du niveau. Les états ne sont pas tout à fait stationnaires en raison d'interactions conduisant à des transitions entre les états. Ces

transitions impliquent que chaque état a une largeur en énergie $\Gamma_i = \hbar/\tau_i$ où τ_i est le temps de vie moyen de l'état en question. La probabilité que l'état i d'énergie moyenne E_i ait une énergie E est donnée par

$$p(E) = \frac{\hbar / (2\pi\tau)}{(E - E_i)^2 + (\hbar / 2\tau)^2}$$

3) Le moment angulaire total J . Le moment angulaire total est la somme des moments orbitaux et de spin des nucléons composants le noyau. Chaque couche complète a un moment angulaire nul. Le moment angulaire d'un noyau ayant un certain nombre de nucléons en excès de couches complètes, est donné par le moment angulaire des nucléons en excès.

4) la parité π . La parité décrit le comportement de la fonction d'onde du noyau si les coordonnées spatiales sont renversées (les spins des particules restant inchangés). La parité est paire si le renversement des coordonnées spatiales ne modifie pas la fonction d'onde, impaire si le renversement implique le changement de signe de la fonction d'onde. La parité de chaque nucléon est donnée par $(-1)^l$. La parité d'un noyau contenant n nucléons est $(-1)^{l_1+l_2+l_3+\dots+l_n}$ où l_i est le moment angulaire orbital de chaque nucléon. La parité d'une couche complète est nulle. La parité d'un noyau dans un état donné est la parité des nucléons en excès, hors des couches complètes.

Les niveaux d'énergie du noyau de l'oxygène sont représentés ci-dessous

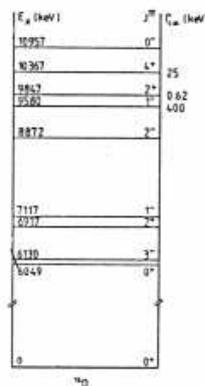


fig 15
Langanke, 1991, in
Nuclei in the Cosmos
H. Oberhummer (ed.)
Springer-Verlag, p 61

Il est intéressant de noter que l'espacement en énergie des niveaux n'est pas uniforme. En particulier, il existe des couches entre lesquelles l'écart en énergie est beaucoup plus important que la moyenne. Ces écarts surviennent lorsque le nombre de nucléons vaut 2, 8, 20, 28, 50, 82 et 120. Il s'agit des nombres magiques de la structure nucléaire. Les noyaux composés d'un nombre magique de nucléons ont une grande stabilité (énergie de liaison importante). Une conséquence importante de ceci est que la section efficace de capture de neutrons est relativement beaucoup plus petite pour ces noyaux que pour les autres.

EXERCICE 10 : Qu'observe-t-on, sur la courbe des abondances cosmiques, à la position des noyaux ayant un nombre magique de nucléons ?

201

B) Qu'est-ce qu'une résonance ?

Une réaction a une résonance à une énergie E , lorsque son taux atteint un maximum

relatif à cet énergie. Soit la transition



qui transite par la formation d'un noyau composé W . Supposons que l'interaction entre a et X puisse être décrite par un potentiel $V(r)$ présenté schématiquement à la figure 16.

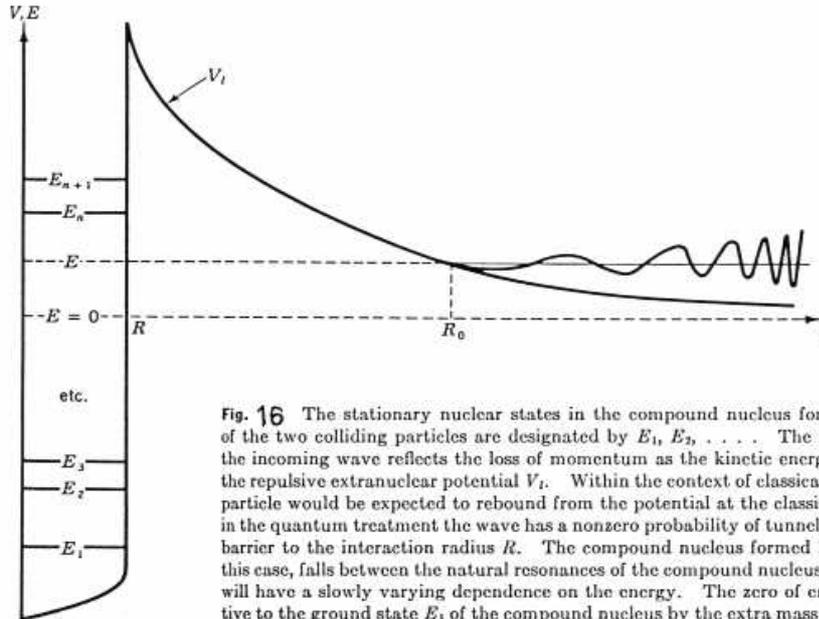


Fig. 16 The stationary nuclear states in the compound nucleus formed by the coalescence of the two colliding particles are designated by E_1, E_2, \dots . The increasing wavelength of the incoming wave reflects the loss of momentum as the kinetic energy E is expended against the repulsive extranuclear potential V_l . Within the context of classical mechanics the incoming particle would be expected to rebound from the potential at the classical turning point R_0 , but in the quantum treatment the wave has a nonzero probability of tunneling through the potential barrier to the interaction radius R . The compound nucleus formed has an energy E that, in this case, falls between the natural resonances of the compound nucleus, so that the cross section will have a slowly varying dependence on the energy. The zero of energy is determined relative to the ground state E_1 of the compound nucleus by the extra mass of the colliding particles.

Des résonances peuvent survenir si

1) L'énergie cinétique des particules à l'infini est telle que l'énergie totale coïncide avec l'un des états quasi-stationnaires du noyau composé. Des états E_n avec des énergies positives peuvent exister car les barrières de potentiel sont suffisamment élevées pour permettre à ces états de subsister un temps relativement long. Notons que l'énergie et la quantité de mouvement sont conservés s'il y a coïncidence des énergies entre l'énergie cinétique à l'infini et l'énergie E de l'état du noyau composé.

2) Il doit y avoir conservation du moment angulaire. La conservation du moment angulaire total impose que

$$\vec{J}_n = \vec{J}_a + \vec{J}_x + \vec{L}$$

où \vec{J}_n est le moment angulaire de l'état excité E_n du noyau composé W , \vec{J}_a, \vec{J}_x sont les spins des particules a et X et \vec{L} est le moment angulaire orbital de a relativement à X . L'addition doit bien sûr être effectuée selon les règles standards d'addition des moments angulaires en mécanique quantique.

3) Enfin, la parité doit être conservée. La conservation de la parité est donnée par

$$\pi(W) = \pi(a) \pi(X) (-1)^l$$

Les parités d'un proton ou d'un neutron sont positives.

REMARQUE : La parité n'est pas conservée dans les désintégrations β .

La figure 17 illustre les résonances de la réaction $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$.

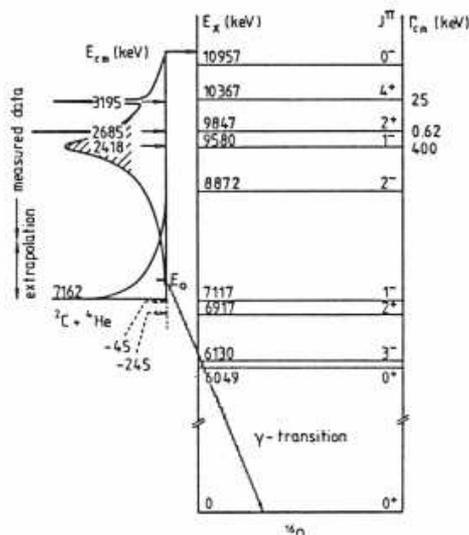


Fig. 17 The ^{16}O level scheme and a sketch of the low-energy $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ cross section

(Langanke, 1991)

C) Section efficace au voisinage d'une résonance

Plus l'énergie E_n est élevée, plus son temps de vie sera court (car moins fortement confinée par la barrière de potentiel). Les niveaux d'énergie seront donc plus larges à mesure qu'ils seront plus élevés en énergie et finalement plusieurs états quasi-statiques se recouvriront. Pour les faibles énergies cinétiques présentes dans les intérieurs stellaires, la longueur des temps de vie des états du noyau composé sont tels qu'il n'y a pas de recouvrement des niveaux. Les états excités qui peuvent se désintégrer en émettant des neutrons tendront à être larges comparés à ceux qui ne peuvent le faire, car il n'y a pas de barrière coulombienne pour les neutrons.

Ainsi chaque état nucléaire a une largeur naturelle

$$\Gamma = \Gamma_p + \Gamma_n + \Gamma_\alpha + \Gamma_\gamma + \Gamma_\beta + \dots$$

et la vitesse avec laquelle l'état se désintègre (une fois formé) en chaque mode est proportionnel à la largeur partielle de chaque mode.

Le taux de formation de l'état avec des particules d'énergie E doit être proportionnel à la probabilité que l'état ait une énergie E , c'est à dire $p(E)$. Si la réaction est due à l'interaction avec une particule de type a , alors la section efficace doit être proportionnelle à Γ_a . Une réaction survient si l'état excité se désintègre en n'importe quel canal autre que celui redonnant naissance à une particule a . Cette probabilité est proportionnelle à $\Gamma - \Gamma_a$.

Ainsi la section efficace à la résonance ($E = E_r$) doit être proportionnelle à

$$\sigma_r \propto \Gamma_a (\Gamma - \Gamma_a) P(E_r) \propto \frac{\Gamma_a (\Gamma - \Gamma_a)}{(\Gamma/2)^2}$$

203

EXERCICE 11 : montrer que le maximum est atteint lorsque $\Gamma_a = \Gamma/2$.

Puisque le maximum vaut 1, il doit être multiplié par la valeur maximale de la section

efficace. Que vaut cette valeur ? On peut montrer que cette valeur maximale peut s'exprimer par

$$\sigma_{r,\ell}(\max) = (2\ell + 1) \pi \lambda^2$$

où ℓ est le nombre quantique associé au moment angulaire orbital de a relativement à X .

Il est possible de donner à ce terme une interprétation semi-classique. Soit p la quantité de mouvement de la particule incidente

$$p = \hbar / \lambda = \hbar k$$

Le moment angulaire $L = bp = b \frac{\hbar}{\lambda}$ où b est le paramètre d'impact classique. Puisque le moment angulaire est restreint aux valeurs quantifiées $L = \ell \hbar$ ceci implique que le paramètre d'impact b est quantifié soit

$$L = b \frac{\hbar}{\lambda} = \ell \hbar ; \quad b = \ell \lambda$$

L'interprétation semi-classique est que le plan des paramètres d'impact est divisé en zones de différentes valeurs de ℓ comme indiqué dans la figure 18.

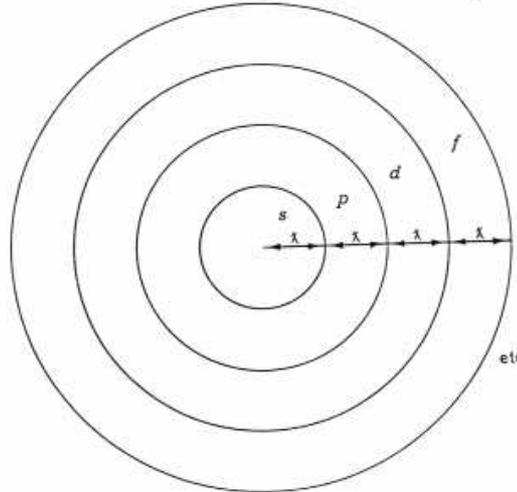


Fig. 18 A classical particle with an angular momentum $\ell \hbar$ has an impact parameter equal to $\ell \lambda$. In the quantum calculation the maximum cross section for the partial wave having angular momentum $\ell \hbar$ is equal to the area of the ℓ th zone of this diagram. This correspondence is no more than a mnemonic device, however, because interactions having a given angular momentum are not in reality restricted to one specific zone.

L'aire de la zone entre ℓ et $\ell + 1$, qui est la section efficace maximale si toutes les particules réagissent, est égale à

$$\sigma_{r,\ell}(\max) = \pi [(\ell + 1) \lambda]^2 - \pi [\ell \lambda]^2 = (2\ell + 1) \pi \lambda^2$$

Ainsi la section efficace pour l'onde partielle ℓ vaut

$$\sigma_{r,\ell} = (2\ell + 1) \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_a (\Gamma - \Gamma_a)}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

La section efficace pour le canal $b + Y$ est obtenu en utilisant, au lieu de $\Gamma - \Gamma_a$, la largeur partielle du canal $b + Y$

$$\sigma_{r,\ell}(a,b) = (2\ell + 1) \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

Il s'agit de la formule de Breit-Wigner ²⁰⁴ à un seul niveau.

REMARQUE : dans la formule ci-dessus, le spin des particules est ignoré. La formule

complète s'écrit

$$\sigma_{r,l}(a,b) = \pi \chi^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E-E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} \omega$$

$$\omega = \frac{2J+1}{(2J_a+1)(2J_b+1)}$$

D) Réactions qui se produisent dans les ailes d'une résonance

Les figures 19 et 20 montrent la section efficace et le facteur astrophysique S en fonction de E , dans le cas de la réaction $^{12}\text{C}(p,\gamma)^{13}\text{N}$. A l'énergie de Gamov, nous nous trouvons dans les ailes d'une résonance.

La figure 21 illustre schématiquement cette situation. Les expériences de laboratoire permettent de mesurer la section efficace au voisinage de la résonance. La formule de Breit-Wigner peut ensuite être utilisée pour extrapoler le facteur S aux énergies stellaires. La figure 22 nous montre les niveaux d'énergie du noyau ^{13}N . Lorsque l'énergie cinétique des protons dans le référentiel du laboratoire vaut 460 keV, l'énergie cinétique des noyaux interagissant dans le RDCM vaut 424 keV. A cet énergie, il y a résonance (voir maximum atteint par la section efficace à cette énergie). L'énergie de Gamov est autour des 25 keV pour des températures de l'ordre de 16 millions de degrés. La formule de Breit-Wigner permet le calcul du facteur S .

EXERCICE 12 : Montrer que

$$\pi \chi^2 = \frac{656.6}{AE} \text{ barns} \quad \left[E = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu \chi^2} \right]$$

E) Résonances aux énergies stellaires

Considérons à nouveau la figure 21 et, par la pensée, rapprochons le pic de résonance du pic de Gamov, soit faisons tendre E_r vers E_0 . On trouve alors que $S(E_0)$ augmente, Γ diminue et que le nombre de particules avec une énergie E proche de E_r augmente. Lorsque E_r devient inférieur à une énergie limite E_l on a que

$$\int_{E_l} \psi(E) \sigma(E) dE \geq \int_{E_0} \psi(E) \sigma(E) dE$$

Dans ce cas, un plus grand nombre de réactions surviennent dans le pic de résonance, plutôt qu'au voisinage de E_0 . Le taux de réaction qui s'écrit :

$$r_{ax} = \frac{N_a N_x}{(1 + \delta_{ax})} \int_0^\infty v(E) \sigma(E) \frac{dn(E)}{n}$$

devient, lorsque la contribution essentielle est due à une résonance,

$$r_{ax} = \frac{N_a N_x}{(1 + \delta_{ax})} v(E_r) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-E_r/kT} \int_{E_r}^\infty \sigma(E) dE$$

Aux basses énergies, les éventuelles résonances sont étroites, aussi $v(E)$ et $dn(E)/n$ varient-ils peu sur l'intervalle d'énergie de la résonance E_r .

La valeur maximale de $\sigma(E)$ est, en appliquant la formule de Breit-Wigner pour un choc

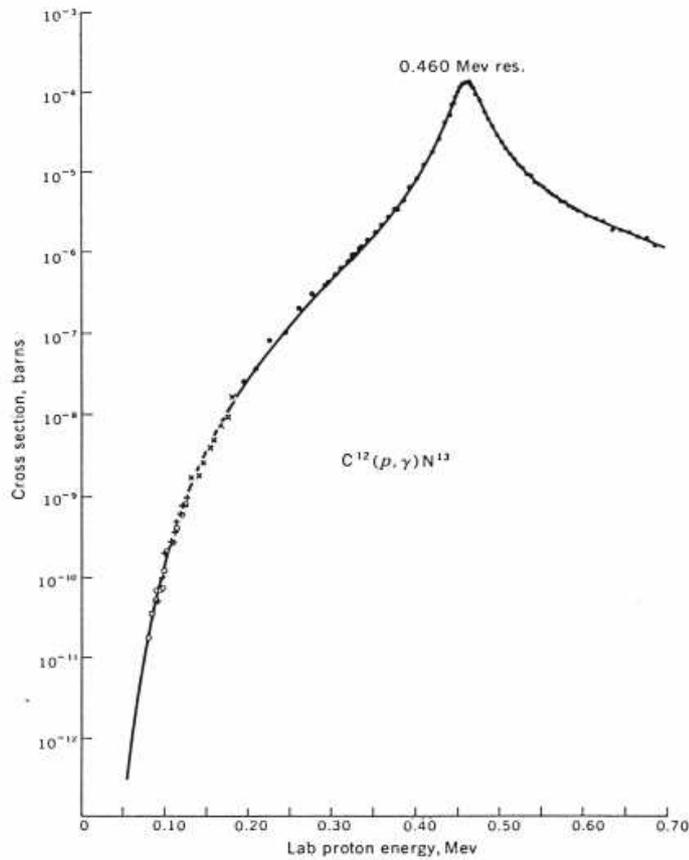


Fig. 19 The measured cross section for the reaction $C^{12}(p, \gamma)N^{13}$ as a function of laboratory proton energy. A four-parameter theoretical curve has been fitted to the experimental points. An extrapolation to $E_p = 0.025$ Mev, which is an interesting energy for this reaction in astrophysics, appears treacherous. (Courtesy of W. A. Fowler and J. L. Vogt.)

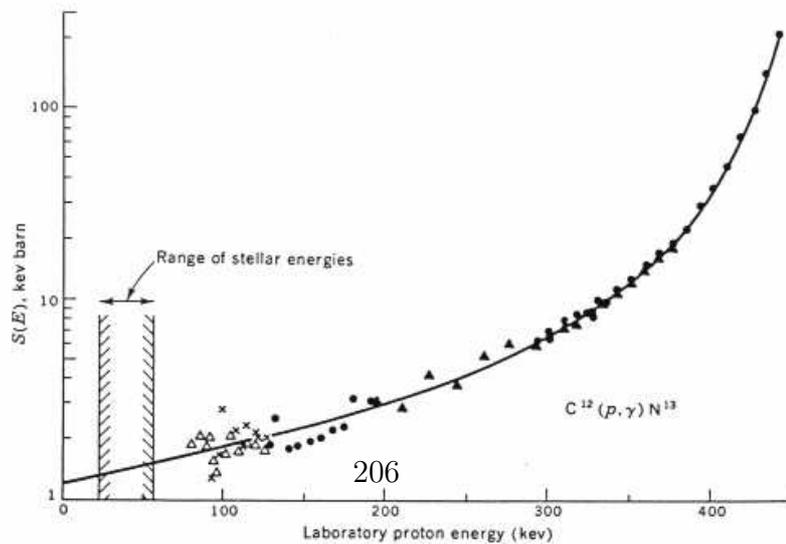


Fig. 20 The cross-section factor $S(E)$ for the radiative capture of protons by C^{12} . The differing types of data points represent five different experiments performed at different times and laboratories by the workers indicated. Detailed references and discussion may be found in D. F. Hebbard and J. L. Vogt, *Nucl. Phys.*, 21:652 (1960). This curve is more readily extrapolated than the one in Fig. 4-4.

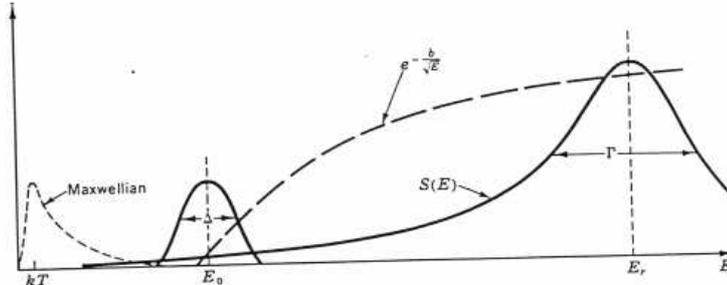
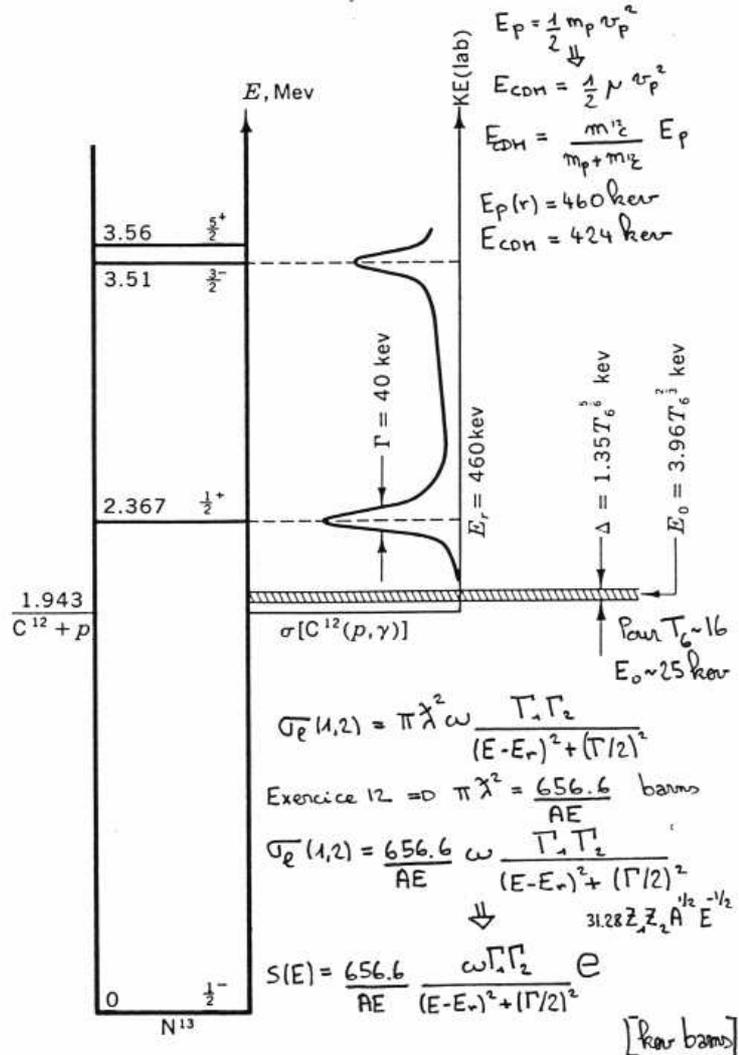


Fig. 21 A schematic representation of the major energy-dependent factors for a reaction, like that in Fig. 4-21, which proceeds through the wing of a broad distant resonance. In such a case the nonresonant-reaction formulation is used, and $S(E)$ is calculable by Eq. (4-188).

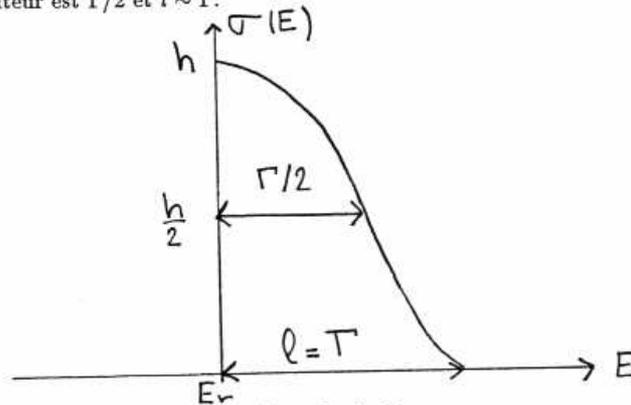
Fig. 22 An energy-level diagram of N^{13} , which serves as the compound nucleus for the reaction $C^{12}(p,\gamma)N^{13}$. The measured cross section for that reaction is displayed vertically just to the right of the discrete-level structure of N^{13} . The cross section is dominated at low energy by an s-wave resonance at $E_p = 460$ kev. Also shown as a hatched band is the range of effective stellar energies near E_0 . At that energy the bombarding protons are captured into the wing of the resonance at 460 kev.



frontal ($l = 0$)

$$\sigma_{\max} = h = \pi \chi^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(\Gamma^2/4)}$$

La largeur à mi-hauteur est $\Gamma/2$ et $l \sim \Gamma$.



En considérant l'intégrale comme la surface d'une demi-ellipse, on a

$$\text{Surface} = \frac{\pi h l}{2} = \frac{\pi h \Gamma}{2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \sigma(E) dE = 2\pi^2 \chi^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma}$$

Le taux de réaction devient:

$$r_{aX} = \frac{\rho^2 X_a X_x \hbar^2}{A_a A_x m_H^2 (1 + \delta_{ax})} \left(\frac{2\pi}{A m_H kT} \right)^{3/2} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} e^{-E_r/kT}$$

En exprimant E_r et Γ en keV et en introduisant les facteurs numériques, on obtient

$$r_{aX} = \frac{2.94 \cdot 10^{36}}{(1 + \delta_{ax})} \rho^2 \frac{X_a}{A_a} \frac{X_x}{A_x} \frac{1}{(AT_6)^{3/2}} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} e^{-11.61 \frac{E_r}{T_6}}$$

avec $T_6 = T/10^6$.

REMARQUES

1) Plusieurs résonances peuvent contribuer à la section efficace, dans ce cas la section efficace s'exprime comme une somme sur les résonances du noyau composé.

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{2\pi \hbar^2}{\mu kT} \right)^{3/2} \sum_r \left(\frac{\omega \Gamma_1 \Gamma_2}{\hbar \Gamma} \right)_r e^{-E_r/kT}$$

2) Ces taux de réactions nucléaires doivent être corrigés de l'effet d'écran.

Chapitre 7

Compléments d'hydrodynamique

- L'hydrodynamique joue un rôle important dans la physique des étoiles et dans celle du milieu interstellaire.
- Les processus de mélange, tels la convection ou la diffusion, peuvent transporter les éléments dans les étoiles. Les conséquences astrophysiques sont importantes. Par exemple, des produits de la synthèse nucléaire qui s'effectue dans les régions centrales peuvent apparaître à la surface des étoiles. Le mélange convectif dans les intérieurs stellaires peut alimenter les régions centrales en combustible nucléaire intact, ce qui a pour effet d'augmenter le temps de vie d'une étoile dans la phase nucléaire concernée.
- L'étude de la convection adiabatique et non adiabatique sera faite au cours de S.I., de même pour la circulation méridienne engendrée par la rotation stellaire, ainsi que la diffusion turbulente engendrée par les diverses instabilités dues à la rotation.
- Nous nous bornons ici à quelques notions de base.

7.1 La fonction de distribution

Considérons un fluide composé d'un seul type de particules. Toutes les particules de ce fluide ont donc la même masse et les mêmes propriétés. Soit $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ la fonction de distribution de probabilité. Cette fonction de la position \vec{r} , du temps, t et de la quantité de mouvement \vec{p} est telle que lorsqu'elle est multipliée par l'élément de l'espace de phase de dimension 6 $d\tau = d\tau_p d\tau_r = dx dy dz dp_x dp_y dP_z$, cela donne le nombre de particules conte-

nues dans cet élément de volume. Le but est la détermination de f . En effet, une fois f déterminé, toute propriété macroscopique peut être obtenue.

7.1.1 Densité en nombre

La densité en nombre n , définie comme le nombre de particules par unité de volume, est obtenue à partir de f par

$$n = \int_p f d\tau_p \quad (7.1)$$

Si m est la masse d'une particule, la densité ρ est égale à $\rho = nm$.

7.1.2 Valeur moyenne d'une grandeur

Soit G une quantité définie pour chaque particule, fonction de la masse et/ou du moment et/ou de l'énergie. La valeur moyenne de G , que nous noterons $\langle G \rangle$ est définie par

$$\langle G \rangle = \frac{1}{n} \int_p G f d\tau_p \quad (7.2)$$

Exemple : la vitesse moyenne

La vitesse moyenne \vec{v}_0 est donnée par

$$\vec{v}_0 = \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n} \int_p \vec{v} f d\tau_p \quad (7.3)$$

où \vec{v} est la vitesse d'une particule, égale à \vec{p}/m .

REMARQUE

- On appelle vitesse particulière la quantité \vec{V} définie par

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{v}_0 \quad (7.4)$$

Cette vitesse caractérise les mouvements aléatoires thermiques des particules. Par définition, $\langle \vec{V} \rangle$ est nulle.

- On peut définir une température cinétique, représentative de l'amplitude des mouvements thermiques, par

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m \langle \vec{V}^2 \rangle \quad (7.5)$$

où k est la constante de Boltzmann. Cette définition n'est valide que pour un gaz monoatomique. Si le gaz est diatomique, le facteur $3/2$ doit être remplacé par $5/2$. Notons que cette définition de la température est beaucoup moins restrictive que la définition thermodynamique de la température (qui exige que l'équilibre thermodynamique soit vérifié). Cette température cinétique peut être définie pour un système n'étant pas à l'équilibre thermodynamique (E.T.).

7.2 Vecteur flux

Soit un élément de surface $d\vec{S}$ à l'intérieur d'un fluide, à travers lequel les particules peuvent librement passer. Le nombre de particules ayant une vitesse entre \vec{v} et $\vec{v} + d\vec{v}$ traversant $d\vec{S}$ pendant le temps dt , que vaut-il ? Ce nombre de particules est

$$f\vec{v}dt \cdot d\vec{S}d\tau_p. \quad (7.6)$$

Soit G une quantité mécanique définie pour chaque particule. Alors

$$Gf\vec{v}dt \cdot d\vec{S}d\tau_p, \quad (7.7)$$

est la quantité de " G " transportée à travers $d\vec{S}$ par des particules ayant une quantité de mouvement entre \vec{p} et $\vec{p} + d\vec{p}$ pendant le temps dt . Pour connaître la quantité de G transportée par toutes les particules, alors il faut intégrer sur l'espace des quantités de mouvement

$$\left(\int Gf\vec{v}d\tau_p \right) \cdot d\vec{S}dt \quad (7.8)$$

$$= n \frac{1}{n} \underbrace{\left(\int Gf\vec{v}d\tau_p \right)}_{\langle G\vec{v} \rangle} \cdot d\vec{S}dt \quad (7.9)$$

$$= n \langle G\vec{v} \rangle \cdot d\vec{S}dt. \quad (7.10)$$

Appelons \vec{u} , le vecteur unité ayant la même direction et le même sens que $d\vec{S}$, alors

$$n \langle G\vec{v} \rangle \cdot d\vec{S}dt = n \langle G\vec{v} \rangle \cdot \vec{u}dSdt. \quad (7.11)$$

Posons $\vec{\Phi}(G) = n \langle G\vec{v} \rangle$, et appelons ce vecteur, le vecteur flux de la quantité G . Ce vecteur a la propriété que sa projection, le long d'une direction quelconque, donne la quantité de G transportée le long de cette direction par unité de temps et de surface.

7.2.1 Vecteur flux de la masse

Le vecteur flux de la masse est

$$n \langle m\vec{v} \rangle = nm \langle \vec{v} \rangle = nm\vec{v}_0 = \rho\vec{v}_0 \quad (7.12)$$

Même si le vecteur flux de masse est nul (pas de masse transportée), il peut néanmoins y avoir transport d'autres quantités. En effet

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}(G) &= n \langle G\vec{v} \rangle = n \langle G(\vec{v}_0 + \vec{V}) \rangle \\ &= n \langle G\vec{v}_0 \rangle + n \langle G\vec{V} \rangle = \underbrace{n\vec{v}_0 \langle G \rangle}_0 + n \langle G\vec{V} \rangle . \end{aligned}$$

7.3 Equations de base

Equation de continuité

Considérons un fluide traversant un élément de volume dx, dy, dz , cf Fig. 7.1

Le débit total net est

$$\text{div}(\rho\vec{v}) \, dx \, dy \, dz \quad (7.13)$$

Ce débit de masse net est égal à la perte de masse par l'élément de volume (conservation de masse).

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} \, dx \, dy \, dz \quad (7.14)$$

On obtient ainsi l'équation de continuité

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (7.15)$$

On peut l'écrire

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho = -\rho \text{div} \vec{v} \quad (7.16)$$

Remarque La variation de densité (ou de vitesse ou de toute autre quantité) d'un élément de volume dont on suit le mouvement ($\frac{d\rho}{dt}$) est composée de deux parties :

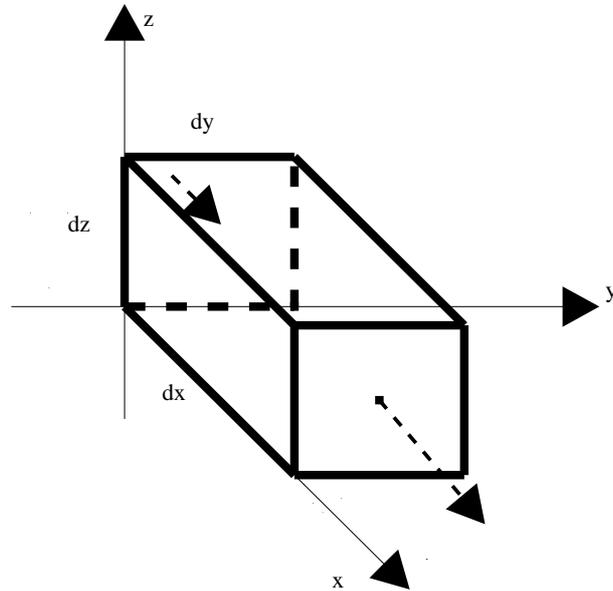


FIG. 7.1 – La composante de la vitesse sur la face $dzdy$ en $x=0$ est v_x , sur la face $dzdy$ en $x=dx$ elle est égale à $v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx$. La différence entre la quantité de matière qui sort du volume et celle qui y entre pendant une unité de temps, le long de la composante x est $\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx dy dz$.

1. La variation de densité en un point considéré de l'espace pendant le temps dt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt \quad (7.17)$$

La dérivée est prise en x, y, z constants.

2. La différence des densités (au même instant) en deux points séparés par la distance dr parcourue par l'élément de volume pendant le temps dt , soit

$$dx \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + dy \frac{\partial \rho}{\partial y} + dz \frac{\partial \rho}{\partial z} = (\vec{dr} \cdot \vec{\nabla}) \rho d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + (\vec{dr} \cdot \vec{\nabla}) \rho \quad (7.18)$$

en divisant par dt

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho \quad (7.19)$$

C'est la variation de densité d'un élément de fluide se déplaçant dans l'espace.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho \quad (7.20)$$

$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho$ est le terme d'advection.

7.4 Equation du mouvement avec termes de viscosité. Equation de *Navier-Stokes*.

La quantité de mouvement totale du fluide dans l'élément de volume considéré change :

- sous l'effet des forces agissant sur le fluide ;
- une partie de la quantité de mouvement s'échappe, emportée par le fluide.

Evaluons cette seconde composante

Flux de la composante de la quantité de mouvement selon l'axe x à travers la face arrière $dy dz$:

$$\begin{aligned} & (\rho v_x) v_x dy dz \\ & (\rho v_x) v_z dx dy \quad \text{par la face } dx dy \\ & (\rho v_x) v_y dx dz \quad \text{par la face } dx dz \end{aligned}$$

De même que précédemment, on a pour le bilan net de quantité de mouvement

$$\text{div} (\rho v_x \vec{v}) dx dy dz \quad (7.21)$$

Débit net de la quantité de mouvement selon l'axe x sortant du volume $dx dy dz$.

Les forces sont :

- forces extérieures \vec{F} (exemple : rotation ...)

- forces de gravité
- forces visqueuses que nous examinerons ci-dessous

Forces de pression entre les faces \perp à l'axe x :

$$- \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx \right] dy dz \quad (7.22)$$

signe "-" : car si p augmente avec x , la force sera dirigée selon $-x$

La variation temporelle de la composante x de la quantité de mouvement est :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) dx dy dz \quad (7.23)$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) dV = \rho \underset{\substack{\uparrow \\ \text{composante } x \text{ de la force}}}{F_x} dV - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dV - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{signe - comme} \\ \text{précédemment : si} \\ \text{div}(\cdot) > 0 \text{ il y a perte et} \\ \text{réciproquement}}}{\text{div}(\rho v_x \vec{v})} dV \quad (7.24)$$

Ecrivons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) + \text{div}(\rho v_x \vec{v}) \\ &= v_x \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right]}_{=0 \text{ (éqn. continuité)}} + \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_x \right] = \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_x \right] \end{aligned}$$

L'équation du mouvement devient donc :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p + \dots \quad (7.25)$$

Eqn. non-linéaire : terme $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$

Expression des termes dus à la viscosité

La face supérieure est animée d'une vitesse uniforme v_0 vers la droite sur la Fig. 7.2.

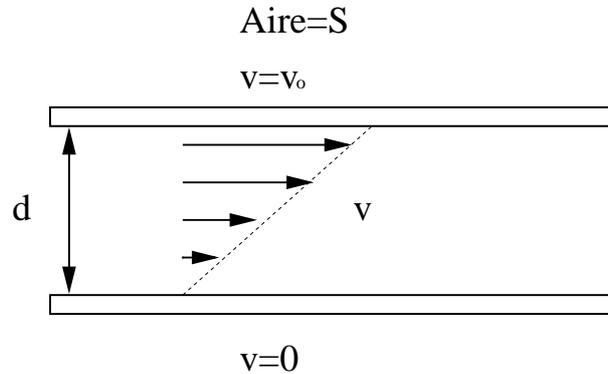


FIG. 7.2 – Force visqueuse entre deux plans parallèles, $F/S = \eta v_0/d$.

La tension $\tau = \frac{F}{S} = \frac{\eta v_0}{d}$ η est le coefficient de viscosité dynamique, $\eta = \rho \nu$ où ν est le coefficient de viscosité cinématique. La viscosité a pour unité $\frac{g \cdot cm}{sec^2} \frac{sec \cdot cm}{cm^2 \cdot cm} = \frac{g}{sec \cdot cm} = 1 \text{ poise (CGS)}$, $\frac{1 kg}{sec \cdot m} = 1 \text{ poiseuille (MKSA)} = 10 \text{ poises}$

Si le plan supérieur est en mouvement uniforme, le fluide doit appliquer une tension $-\tau$ afin que la résultante agissant sur la plaque soit nulle.

Considérons la situation suivante :

$$\begin{aligned} \text{fluide } v_x &= v_x(y) \\ v_y &= v_z = 0 \end{aligned} \quad (7.26)$$

Considérons une petite cellule rectangulaire plane. La composante de la force selon l'axe x , par unité de surface perpendiculaire à y est

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (7.27)$$

Symétrie de σ_{xy} : $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

Considérons l'élément rectangulaire ABCD. A la tension tangentielle σ_{xy} est opposée une tension égale de signe opposé agissant sur la face opposée du rectangle.

Le moment des forces tangentielles au point A est :

$$m_z = -(\sigma_{xy} dx dz) dy + (\sigma_{yx} dy dz) dx \quad (7.28)$$

L'équation de la dynamique des corps en rotation $m_z = I_z \cdot \dot{\Omega}$

$$(\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) dV = I_z \dot{\Omega} \quad (7.29)$$

$$\left. \begin{array}{l} I : \text{moment d'inertie} \\ \Omega : \text{vitesse angulaire de rotation} \end{array} \right\} \text{par rapport axe } Az \quad (7.30)$$

Si on fait tendre la taille de l'élément de fluide vers zéro, $I \sim m r^2$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à dV .

Le terme de droite tend plus vite vers zéro. Le seul moyen d'assurer la cohérence est d'avoir $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$.

Cas d'un écoulement quelconque

Hypothèse du fluide newtonien : les tensions visqueuses sont des fonctions linéaires et homogènes des gradients de vitesses (même si l'écoulement n'est pas permanent). (Remarque : *solides* : prop. aux déformations).

Donc (impliqué par la linéarité) :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (7.31)$$

Fluide quelconque : gradient de vitesse dans les diverses directions. Idem pour les autres tensions.

Sens de

$$\sigma_{xx} : \quad \sigma_{xx} = 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (7.32)$$

pression sur les faces \perp à x

Changement de V_x selon x résultant de contraintes \perp aux faces $dydz$

Expression générale :

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.33)$$

On remarque

$$\sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} \quad (7.34)$$

non nulle. Donc la viscosité affecterait la pression, ce qui n'est pas le cas. Donc on prend

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\eta}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{v} \quad (7.35)$$

La force visqueuse nette est obtenue en prenant la différence des forces sur les faces opposées.

$$\begin{aligned} (f_{\text{visq.}})_x &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} dx \right) dy dz + \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} dy \right) dx dz \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} dz \right) dy dx = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{xj} dx dy dz \\ &= \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \eta \frac{\partial v_x}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \eta \frac{\partial v_j}{\partial x} \right) \frac{-2}{3} \sum_j \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \delta x_j \operatorname{div} \vec{v} \\ &= \eta \nabla^2 v_x + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \\ &\quad - \frac{2\eta}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ &= \eta \nabla^2 v_x + \left(\frac{\zeta + \eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{v} \end{aligned} \quad (7.36)$$

Remarque

On ajoute parfois un terme ζ , dit de seconde viscosité. Ce terme intervient par exemple dans le cas d'un gaz polyatomique soumis à des fluctuations de pression rapides. Physiquement, un changement de pression agit sur les vitesses de translation, l'énergie n'est transférée que plus lentement aux modes de vibration et de rotation. Cela introduit des contraintes normales, qui peuvent être prises en compte par une correction de pression intervenant par le terme ζ ci-dessus.

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \vec{\nabla} (\operatorname{div} \vec{v}) \quad (7.37)$$

Equation de Navier-Stokes

Si le fluide est incompressible, $\rho = \text{const.}$ et on a

$$\text{Equation de continuité :} \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (7.38)$$

Equation de *Navier-Stokes*.

En divisant par ρ :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (7.39)$$

Remarque

Si les forces extérieures et la viscosité sont négligeables, on a

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (7.40)$$

Equation d'*Euler*

Condition : Pour l'application de *Navier-Stokes* aux milieux légèrement compressibles.

On montre que cette équation est valable lorsque

$$M^2 = \frac{v^2}{V_{son}^2} \ll 1 \quad (7.41)$$

Compressibilité $\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \beta \frac{\Delta P}{P}$ en ignorant les effets de T

$$V_{son}^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \sim \frac{P}{\rho \beta} \quad \text{donc} \quad \frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \frac{\Delta p}{V_{son}^2 \rho}$$

$$\Delta p \sim \frac{\text{force}}{\text{surf}} \sim \frac{\text{énergie}}{\text{vol.}} \sim \rho v^2 \quad (7.42)$$

Donc

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \frac{v^2}{V_{son}^2} \quad (7.43)$$

Remarque

Si le milieu compressible $P = P(\rho, T)$, il faut utiliser l'équation complète du mouvement. Par contre, si ρ dépend peu de T , l'application de N.S. est limitée à $(\text{nombre Mach})^2 < 1$.

7.5 Expression de la viscosité

Selon la théorie cinétique des gaz

$$\eta = \frac{1}{3} m n \ell \bar{v}$$

m : masse des particules

n : concentration

ℓ : libre parcours moyen

C'est la *viscosité moléculaire*.

Viscosité radiative (Jeans 1926)

L'expression ci-dessus est obtenue en considérant que les molécules du gaz transportent de la quantité de mouvement.

Le rayonnement transporte également de la quantité de mouvement et on peut donc lui associer une viscosité.

$$\eta = \frac{1}{3} \rho v_{rms} \ell \tag{7.44}$$

Pour des photons

$$\begin{aligned} v_{rms} &\rightarrow c \\ \ell &\rightarrow \frac{1}{\kappa \rho} \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{u}{c^2} = \frac{a T^4}{c^2} \tag{7.45}$$

D'où

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{a T^4 c}{c^2 \kappa \rho} = \frac{1}{3} \frac{a T^4}{c \kappa \rho} \tag{7.46}$$

Viscosité radiative, qui est particulièrement importante dans les étoiles massives.

Un calcul plus détaillé, cf.

– Thomas 1936, *Quart. J. Math.* **1**, 239

– Hazlehurst, Sargent 1959, *ApJ* **130**, 276
 conduit à

$$\eta = \frac{4}{15} \frac{a T^4}{c \kappa \rho} \quad (7.47)$$

7.6 Equation de conservation de l'énergie

Considérons un élément de volume

$$\underbrace{\int_m \frac{dq}{dt} dm}_{\substack{\text{Gains d'énergie} \\ \text{dans } m \text{ par unité} \\ \text{de temps.} \\ q : \text{énergie four-} \\ \text{nie par un. de} \\ \text{masse}}} = \underbrace{\int \epsilon m}_{\substack{\text{Energie produite} \\ \text{dans } m \text{ par unité} \\ \text{de masse}}} - \underbrace{\oint \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}}_{\text{flux}} \quad (7.48)$$

ϵ : puissance émise par unité de masse (w/kg). **Débit ou taux d'énergie rayonnée** sous forme de photons ou de ν .

Théorème de Gauss

$$\begin{aligned} \int_V \frac{dq}{dt} \rho dV &= \int_V \rho \epsilon dV - \int_V \text{div } \vec{F} dV \\ \rightarrow \frac{dq}{dt} &= \epsilon - \frac{1}{\rho} \text{div } \vec{F} \end{aligned}$$

$\frac{dq}{dt}$ est donné par le premier *Principe de la Thermodynamique*

$$\begin{aligned} dq \nearrow &= dU + d\tau \nearrow \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{dU}{dt} + \frac{p dV}{dt} \end{aligned}$$

où les quantités sont considérées par unité de masse. U est l'énergie interne par unité de masse (agitation thermique, excitation, ionisation, radiation, dégénérescence).

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dU}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (7.49)$$

On a donc

$$\frac{dq \swarrow}{dt} = \frac{dU}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \epsilon - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} F \quad (7.50)$$

Equation de conservation de l'énergie.

On peut aussi l'écrire sous la forme suivante, en utilisant

$$\begin{aligned} dq \swarrow &= T dS \\ \text{et } F &= -\chi \nabla T \end{aligned} \quad (7.51)$$

avec $\chi = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}$ en milieu radiatif.

$$\rho \frac{dq}{dt} = \rho \frac{T dS}{dt} = \rho \epsilon + \nabla \cdot (\chi \nabla T) \quad (7.52)$$

ou

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} S \right) = \rho \epsilon + \vec{\nabla} \cdot (\chi \vec{\nabla} T) \quad (7.53)$$

Remarque

Si nécessaire, il faut ajouter des termes de dissipation visqueuse dont nous ne précisons pas la forme ici.

Terme $\frac{dq}{dt}$ dans les étoiles

Dans une étoile, le terme $\frac{dq \swarrow}{dt}$ représente l'énergie fournie au système au cours du temps, en particulier lors d'un changement de structure sous l'action de la gravitation. On note

$$\frac{dq \swarrow}{dt} \equiv -\epsilon^{grav} \quad (7.54)$$

avec ϵ^{grav} : Energie produite par le système lors d'une contraction, si $\epsilon^{grav} > 0$.

Si $\epsilon^{grav} < 0$: Expansion

(7.55)

L'équation de conservation de l'énergie devient alors

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div} F = \epsilon + \epsilon^{grav} \quad (7.56)$$

Remarque

En général $\epsilon \equiv \epsilon^{nucl}$ dans les étoiles, c'est-à-dire le taux de production d'énergie nucléaire par unité de masse et de temps. Toutefois, dans les stades avancés de l'évolution nucléaire (à partir de la fusion du C), les pertes par neutrinos sont importantes (celles-ci ne participent pas au transfert d'énergie radiative) et on a

$$\epsilon \equiv \epsilon^{nucl} - \epsilon^{neutrino} \quad (7.57)$$

Symétrie sphérique

Ecrivons l'équation de conservation sous sa forme usuelle. On a

$$\vec{F} = \left(\frac{Lr}{4\pi r^2}, \quad 0, \quad 0 \right) \quad (7.58)$$

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 Lr}{4\pi r^2} \right) = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial Lr}{\partial r} = \frac{\partial Lr}{\partial Mr} \quad (7.59)$$

$$\frac{\partial Lr}{\partial Mr} = \epsilon^{nucl} - \epsilon^{neutrino} + \epsilon^{grav} \quad (7.60)$$

Les expressions de ϵ^{nucl} sont vues au chapitre 6, celles de $\epsilon^{neutrino}$ et ϵ^{grav} sont étudiées au cours de SI.

7.7 Nombres sans dimension

Plusieurs nombres sans dimension caractérisent les régimes hydrodynamiques. Ces nombres sont très différents dans les conditions astrophysiques et dans les conditions terrestres.

Nombre de Reynolds

Considérons l'équation de *Navier-Stokes*

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (7.61)$$

Le rapport du terme inertiel au terme de viscosité est

$$\frac{\text{terme inertiel}}{\text{terme viscosité}} \simeq \frac{\frac{v}{t}}{\nu v/\ell^2} \simeq \frac{v}{\ell \frac{\nu}{\ell^2}} \simeq \frac{v\ell}{\nu} \quad (7.62)$$

où v , ℓ , t sont respectivement les vitesses, longueur et temps typiques.

$$Re = \frac{v\ell}{\nu} \quad (7.63)$$

Lorsque $Re < 2 \cdot 10^3$, les mouvements turbulents sont amortis par les effets de viscosité et les écoulements sont laminaires.

Remarque

Ce nombre est valable pour l'écoulement dans un tuyau, et n'est pas nécessairement égal dans le contexte *Ap*. Re intervient dans les problèmes de similitude dynamique. Si la gravité joue un rôle dans les problèmes de similitude, il faut aussi considérer le *nombre de Froude*

$$Fr = \frac{V}{(gL)^{1/2}} \quad (7.64)$$

Remarque

Dans les écoulements, il y a toujours une couche limite avec ℓ très petit où le terme de viscosité en $1/\ell^2$ n'est pas négligeable.

La viscosité introduit une condition de non-glissement sur la couche limite. Cette condition demeure même pour des nombres Re très élevés. (Par exemple, les pales d'un ventilateur sont encrassées, même s'il tourne très vite).

Nombre de Prandtl

Considérons une cellule d'un fluide caractérisé par une viscosité ν et un coefficient de conduction radiative χ .

D'après l'équation de *Navier-Stokes*, le temps d'ajustement visqueux (temps typique pour que la viscosité réalise l'équilibre dynamique) est

$$t_{visc} \simeq \frac{\ell^2}{\nu} \quad (7.65)$$

$$\begin{aligned} \text{pour soleil} & : 10^{14} \text{ ans} \\ 10 M_{\odot} & : 10^{10} \text{ ans} \end{aligned}$$

Examinons l'équilibre thermique de la cellule. L'équation de conservation de l'énergie nous donne (ignorons la viscosité)

$$\rho \frac{dq}{dt} = \nabla \chi \nabla T \epsilon = 0 \quad (7.66)$$

Supposons $\chi = \text{const}$ dans la cellule, que l'on suppose par ailleurs en équation de pression

$$\frac{dq}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} \quad \rho c_p \frac{dT}{dt} = \chi \nabla^2 T \quad (7.67)$$

Equation de conduction de la chaleur :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\chi}{\underbrace{\rho c_p}_K} \nabla^2 T \quad (7.68)$$

K : Diffusivité radiative, exprime le rapport entre l'énergie sortante et l'énergie contenue :

$$\text{Unité : } \frac{(\text{longu.})^2}{\text{temps}} \quad (7.69)$$

$$\frac{dT}{dt} = K \nabla^2 T \quad (7.70)$$

Le temps d'ajustement thermique est

$$t \simeq \frac{\ell^2}{K} \quad \begin{array}{l} \text{Soleil : } t \simeq \frac{R^2}{K} \quad 10^8 y \\ 10 M_{\odot} \quad \quad \quad 10^5 y \end{array} \quad (7.71)$$

Le rapport du temps d'ajustement thermique au temps d'ajustement visqueux

$$\frac{t_{therm}}{t_{visc}} \simeq \frac{\ell^2}{K} \frac{\nu}{\ell^2} = \frac{\nu}{K} \equiv Prandtl \quad (7.72)$$

C'est le nombre de *Prandtl*. A $T = 10^7 K$, il vaut environ 10^{-6} , ce qui signifie que dans les étoiles l'équilibre thermique est beaucoup plus vite réalisé que l'équilibre par l'effet de la viscosité. C'est une caractéristique du fluide et non de l'écoulement.

La très faible valeur du nombre *Prandtl* dans les étoiles est responsable de la grande différence de propriétés entre les milieux stellaires et terrestres.

$$Pr = \frac{\nu}{K} \simeq 1 \quad \text{pour l'eau et l'air}$$

Sodium ou mercure : 10^{-2}

Milieu stellaire :

$$\frac{\nu}{K} = \frac{4}{15} \frac{a T^4}{c \kappa \rho^2} \frac{3 \kappa \rho}{4 a c T^3} c_p \rho = \frac{c_p T}{5 c^2} \quad (7.73)$$

$$K \text{ pour une étoile : } \frac{\text{énergie sort. longueur}}{\text{surf. temps}} \cdot \frac{\text{longueur}^3}{\text{en. contenue}} \quad (7.74)$$

$$K \simeq \frac{L R}{G M^2} R^2 \quad (7.75)$$

$$t_{therm} \simeq \frac{R^2}{K} \simeq \frac{L R}{G M^2} \equiv \text{temps de Kelvin - Helmholtz} \quad (7.76)$$

Le temps mis par l'énergie pour sortir d'une étoile est égal au temps de Kelvin-Helmoltz $\left(\frac{\text{énergie gravifique}}{L}\right)$.

Remarque

Dans les mouvements convectifs, le temps caractéristique du mouvement est

$$t_{mvt} \simeq \frac{\ell}{v} \quad (\text{temps pour parcourir la distance d'une cellule.}) \quad (7.77)$$

Le nombre de Péclet

$$Pe = \frac{t_{therm}}{t_{mvt}} = \frac{\ell^2}{K} \frac{v}{\ell} = \frac{v \ell}{K} \quad (7.78)$$

$Pe > 1$: La cellule convective n'a pas le temps de perdre de la chaleur lors de son mouvement. Convection efficace pour le transport de chaleur. Il y a de nombreux autres nombres sans dimension qui caractérisent les milieux hydrodynamiques.

7.8 Equation du mouvement avec rotation

Limitons nous à quelques considérations sur les fluides en rotation utiles en astrophysique.

Les accélérations mesurées dans un réf. d'inertie I et un réf. en rotation R sont liées par

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R + \vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \cdot \vec{v}_R \quad (7.79)$$

$$\begin{aligned} \Omega & : \text{vitesse angulaire du réf. tournant} \\ r & : \text{position de la particule} \\ v_R & : \text{vitesse dans le réf. en rotation} \end{aligned} \quad (7.80)$$

L'équation du mouvement dans le réf. en rotation devient donc

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_p + \nu \Delta \vec{v} + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3}\right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) - 2\vec{\Omega} \cdot \vec{v}_R \quad (7.81)$$

L'accélération centrifuge peut être déduite d'un potentiel V , si $\Omega = \text{const.}$

$$\nabla V = -\Omega^2 \omega \quad \frac{\partial V}{\partial \omega} = -\Omega^2 \omega \quad V = -\frac{1}{2} \Omega^2 \omega^2 \quad (7.82)$$

Si les forces \vec{F} dérivent d'un potentiel pour un fluide incompressible

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} \Omega^2 \omega^2 + \psi \right) - 2 \vec{\Omega} \cdot \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

Equivalent de l'équation de *Navier-Stokes* pour un milieu en rotation.
Le rapport

$$R_0 = \frac{\text{force inertie}}{\text{force Coriolis}} \simeq \frac{\frac{v^2}{\ell}}{2\Omega v} = \frac{v}{2\Omega \ell}$$

nombre de Rossby

Le rapport

$$Ek = \frac{\text{forces visc}}{\text{forces Coriolis}} \simeq \frac{\frac{\nu v}{\ell^2}}{\Omega v} = \frac{\nu}{\Omega \ell^2} \quad (7.83)$$

est le nombre d'*Ekman* (1905).

En régime stationnaire, si Ro et Ek sont $\ll 1$, l'équation du mouvement devient :

$$2\vec{\Omega} \cdot \vec{v} = -\nabla \left[\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} \Omega^2 \omega^2 + \Psi \right]$$

Un écoulement satisfaisant cette équation est dit géostrophique (écoulement à la surface de la Terre).

Force de *Coriolis* \perp à la direction du mouvement, donc gradient de pression (généralisée) est aussi \perp à la direction du mouvement.

La pression $p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 \omega^2 + \rho \psi$ est constante le long d'une ligne de courant (ligne suivie par une particule).

Remarque

Le vent souffle \parallel aux isobares.

Hémisphère nord : dans le sens horaire autour des centres de haute pression.
Cette approximation est bonne à des altitudes supérieures à 1 km (sinon effet de viscosité).

Théorème de Taylor-Proudman

Prenons le rotationnel de l'équation du régime géostrophique :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{v}) &= 0 && \text{car rot. grad } () = 0 \\ &= \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Omega}}_{=0} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \underbrace{\vec{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})}_{=0} - \underbrace{\vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega})}_{=0} \end{aligned} \quad (7.84)$$

Ω étant constant, de plus $div \vec{v} = 0$ ($\rho = const$) à l'approximation vue plus haut.

Il vient alors

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = 0$$

Les mouvements ne peuvent varier dans la direction de l'axe de rotation.

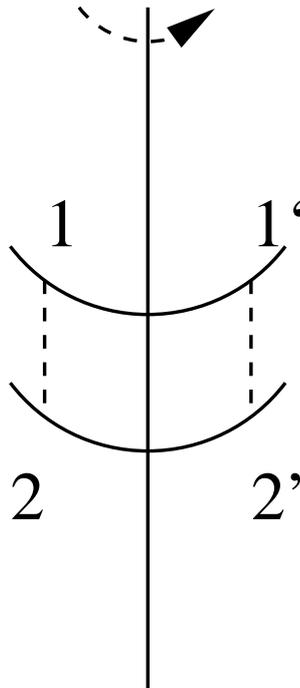


FIG. 7.3 – 2 particules sur une ligne \parallel à l'axe de rotation resteront liées sur une telle ligne \parallel et à la même distance l'une de l'autre.

Les mouvements statiques lents dans un fluide non visqueux incompressible (à

l'approximation considérée) en rotation sont nécessairement bi-dimensionnels cf Fig. 7.3 (*Théorie de Taylor-Proudman*).

Colonne de Taylor

Au-dessus et au-dessous de l'obstacle, il y a des colonnes fluides, comme si il y avait de parois solides. Pas de transfert entre intérieur et extérieur.

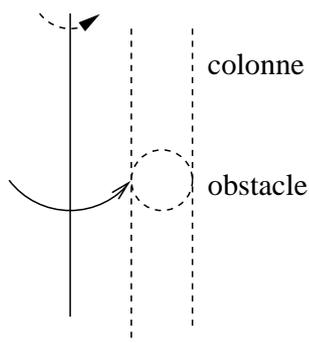


FIG. 7.4 –

Nous avons vu, dans ce chapitre 8, quelques éléments de base de l'hydrodynamique. Les grands ordinateurs ont permis ces dernières années la réalisation de simulations numériques de problèmes hydrodynamiques complexes, tels la formation stellaire, les disques d'accrétion, la coalescence stellaire etc.