Cours d'Astrophysique II, Dr. Pascale Jablonka | EPFL

Section de physique 3e année | Série de la semaine No 3
15.10.2018 | Semestre d'automne 2018

Corrigé: Généralités sur le rayonnement (suite)

1 Pression:

1. L'énergie cinétique d'une particule est, dans un gaz parfait monoatomique, $E = \frac{3}{2}kT$. La densité d'énergie cinétique est donc $u_{\mathrm{cin}} = \frac{3}{2}nkT$ où n est la densité numérique de particules. Par ailleurs, l'équation d'état du gaz parfait est $P = nkT$. Par conséquent, on voit immédiatement que $P = \frac{2}{3}\, u_{\mathrm{cin}}$.

2. Soient deux composantes du gaz: la première, non relativiste, a une densité numérique n_{NR}; la seconde a une densité n_{R}. La densité d'énergie cinétique totale peut alors s'écrire comme la somme des densités dénergie partielles, et il en va de même des pressions:

$$\begin{aligned} n &= n_{\mathrm{NR}} + n_{\mathrm{R}} \\ u_{\mathrm{cin}} &= u_{\mathrm{NR}} + u_{\mathrm{R}} = \int_0^\infty E_{\mathrm{cin}}^{\mathrm{NR}}(p) \cdot n_{\mathrm{NR}}(p)\, dp + \int_0^\infty E_{\mathrm{cin}}^{\mathrm{R}}(p) \cdot n_{\mathrm{R}}(p)\, dp \\ P &= \frac{2}{3} u_{\mathrm{NR}} + \frac{1}{3} u_{\mathrm{R}} = \frac{2}{3}\int_0^\infty E_{\mathrm{cin}}^{\mathrm{NR}}(p) \cdot n_{\mathrm{NR}}(p)\, dp + \frac{1}{3}\int_0^\infty E_{\mathrm{cin}}^{\mathrm{R}}(p) \cdot n_{\mathrm{R}}(p)\, dp \end{aligned}$$

   On a alors:

$$\begin{aligned} \frac{P}{u_{\mathrm{cin}}} &= \frac{\frac{2}{3}u_{\mathrm{NR}} + \frac{1}{3}u_{\mathrm{R}}}{u_{\mathrm{NR}} + u_{\mathrm{R}}} = \frac{2}{3}\frac{u_{\mathrm{NR}}}{u_{\mathrm{cin}}} + \frac{1}{3}\underbrace{\frac{u_{\mathrm{R}}}{u_{\mathrm{cin}}}}_{1-\frac{u_{\mathrm{NR}}}{u_{\mathrm{cin}}}} = \frac{2}{3}\frac{u_{\mathrm{NR}}}{u_{\mathrm{cin}}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{u_{\mathrm{NR}}}{u_{\mathrm{cin}}} \\ \frac{P}{u_{\mathrm{cin}}} &= \frac{1}{3}\frac{u_{\mathrm{NR}}}{u_{\mathrm{cin}}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{u_{\mathrm{NR}}}{u_{\mathrm{cin}}}\right) \end{aligned}$$

   Comme $0 \leq \frac{u_{\mathrm{NR}}}{u_{\mathrm{cin}}} \leq 1$, on retrouve bien que

$$\frac{1}{3} \leq \frac{P}{u_{\mathrm{cin}}} \leq \frac{2}{3}$$

2 Loi de Wien:

1. Approximation de Wien:

$$\frac{hc}{\lambda kT} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad B_\lambda(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(\frac{-hc}{\lambda kT}\right) \propto x^5\, e^{-x} \quad \text{avec} \quad x = \frac{hc}{\lambda kT}$$

$$\left.\frac{dB_\lambda}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_{max}} = \left.\frac{dB_\lambda}{dx}\frac{dx}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_{max}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^5 e^{-x}\right]_{x=x_{max}} = 0 \quad \text{car} \quad \frac{dx}{d\lambda} \neq 0 \quad \forall\lambda$$

$$\Rightarrow \quad 5x^4 e^{-x} - x^5 e^{-x}\big|_{x=x_{max}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{max} = 5 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{max} T = \frac{1}{5}\frac{hc}{k} = 0.288\,\mathrm{cm\,K}$$

2. A partir de la loi de Planck:

$$\left.\frac{dB_\lambda}{dx}\right|_{\lambda=\lambda_{max}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{x^5}{e^x - 1}\right]_{x=x_{max}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{5x^4(e^x-1) - x^5 e^x}{(e^x-1)^2}\right]_{x_{max}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5\,(e^x - 1) = x e^x \Rightarrow \left[5\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right]_{x_{max}} = x_{max} \quad \Rightarrow \quad x_{max} = \frac{hc}{kT\lambda_{max}} \approx 4.95$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{max} T = \frac{1}{x_{max}}\frac{hc}{k} \approx 0.2014\frac{hc}{k} = 0.2898\,\mathrm{cm\,K}$$

3.

Corps	$T[K]$	$\lambda_{max}[\mu m]$
Nuage HI	~ 100	28.98
Nuage de poussière	~ 300	9.66
CMB	~ 3	966
Etre humain	~ 310	9.35
Epinards surgelés	~ 255	11.36