Corrigé: Généralités sur le rayonnement (suite)

1 La température des planètes

1). Le Soleil rayonne avec une puissance $L_\odot$ [J/s] dans toutes les directions. A une distance a de l'étoile la puissance reçue par unité de surface vaut $L_\odot/(4\pi a^2)$. L'énergie reçue par une demi-sphère de rayon $r \ll a$ (i.e. la planète) par unité de temps vaut:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E_{\text{reçue}}}{\mathrm{d}t} &= \int_{1/2-\text{sphère}} \frac{L_\odot}{4\pi a^2}\cos(\theta)\mathrm{d}S = \frac{L_\odot}{4\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi \quad (1)\\
&= \frac{L_\odot}{4\pi a^2}\ \pi r^2 = \frac{L_\odot}{4}\ \frac{r^2}{a^2} \quad (2)
\end{aligned}$$

On suppose que l'atmosphère de la planète absorbe toute l'énergie qu'elle reçoit:

$$\mathrm{d}E_{\text{absorbée}} = \mathrm{d}E_{\text{reçue}} = \frac{L_\odot}{4}\ \frac{r^2}{a^2}\ \mathrm{d}t$$

2). On suppose que la planète réfléchit la même quantité d'énergie par angle solide dans toutes les directions. On définit $P(0)$ comme l'énergie de la lumière réfléchie, reçue par unité de temps $\mathrm{d}t$ et par unité de surface à distance D de la planète. Si $\mathrm{d}E_{\text{réfléchie}}/\mathrm{d}t$ est la puissance totale réfléchie par la planète dans toutes les directions, le flux à distance D vaut:

$$P(0) = \frac{\mathrm{d}E_{\text{réfléchie}}}{4\pi D^2\ \mathrm{d}t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}E_{\text{réfléchie}}}{\mathrm{d}t} = 4\pi D^2\ P(0)$$

Cela est peu réaliste, puisque la planète présente des phases: seul un hémisphère réfléchit la lumière; l'hémisphère plongé dans la nuit ne réfléchit évidemment rien.

3). Soit α l'angle entre les deux directions planète-Soleil et planète-récepteur. On définit $P(\alpha)$ comme l'énergie réfléchie par unité de temps $\mathrm{d}t$ et par unité de surface dans la direction α et à distance D de la planète.

$$P(\alpha) = \frac{\mathrm{d}E_{\text{réfléchie},\alpha}}{\mathrm{d}S_\alpha\ \mathrm{d}t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}E_{\text{réfléchie},\alpha}}{\mathrm{d}t} = P(\alpha)\ \mathrm{d}S_\alpha$$

L'élément de surface qui reçoit le rayonnement réfléchi sous un angle α est $\mathrm{d}S_\alpha = D^2\, d\Omega$, où $d\Omega$ est un élément d'angle solide. En coordonnées sphériques, on a $\mathrm{d}\Omega = \sin\alpha\ \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}\varphi$ et l'énergie totale réfléchie par unité de temps s'obtient en intégrant sur les angles solides:

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{réfléchie}}}{\mathrm{d}t} = \int_\Omega \frac{\mathrm{d}E_{\text{réfléchie},\alpha}}{\mathrm{d}t} = \int_\Omega P(\alpha)\ \mathrm{d}S_\alpha = D^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P(\alpha)\sin\alpha\ \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}\varphi$$

On a une symétrie cylindrique autour de la direction planète-Soleil, donc

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{réfléchie}}}{\mathrm{d}t} = 2\pi D^2 \int_0^{\pi} P(\alpha)\sin\alpha \ \mathrm{d}\alpha$$

On remarque que si $P(\alpha) = P(0)$, on obtient le résultat du point précédent:

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{réfléchie}}}{\mathrm{d}t} = 4\pi D^2 P(0)$$

L'Albédo de Bond A est défini par:

$$A \doteq \frac{\mathrm{d}E_{\text{réfléchie}}}{\mathrm{d}E_{\text{reçue}}} = \frac{2\pi D^2 \int_0^{\pi} P(\alpha)\sin(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha}{\frac{L_\odot}{4}\ \frac{r^2}{a^2}} = \frac{8\pi a^2 D^2}{L_\odot r^2}\int_0^{\pi} P(\alpha)\sin(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha$$

Si la fonction $P(\alpha)$ est connue, on peut ainsi déterminer l'Albédo de la planète.

4). La quantité d'énergie absorbée par la planète vaut:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E_{\text{absorbée}} &= \mathrm{d}E_{\text{reçue}} - \mathrm{d}E_{\text{réfléchie}} \\
&= (1-A)\mathrm{d}E_{\text{reçue}} \\
&= (1-A)\tfrac{1}{4}L_\odot \tfrac{r^2}{a^2}\ \mathrm{d}t \\
&= (1-A)\pi \tfrac{R_\odot^2\, r^2}{a^2}\sigma T_{\text{eff},\odot}^4\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

5). On suppose que la planète est un conducteur parfait et ré-émet l'énergie absorbée en rayonnant comme un corps noir:

$$\mathrm{d}E_{\text{émise}} = \mathrm{d}E_{\text{absorbée}}$$

$$L_P = 4\pi r^2 \sigma T_{\text{eff},P}^4$$

Ceci implique:

$$\mathrm{d}E_{\text{émise}} = L_P\ \mathrm{d}t = 4\pi r^2\sigma T_{\text{eff},P}^4\ \mathrm{d}t$$

Or on vient d'établir:

$$\mathrm{d}E_{\text{absorbée}} = (1-A)\pi\frac{R_\odot^2\, r^2}{a^2}\sigma T_{\text{eff},\odot}^4\ \mathrm{d}t$$

D'où:

$$T_{\text{eff},P}^4(\text{bon conducteur}) = \frac{1}{4}(1-A)\frac{R_\odot^2}{a^2}T_{\text{eff},\odot}^4$$

6). On suppose que la planète est un mauvais conducteur et rayonne seulement par sa face illuminée par le Soleil:

$$\mathrm{d}E_{\text{émise}} = \mathrm{d}E_{\text{absorbée}}$$

$$L_P = \frac{1}{2}4\pi r^2\sigma T_{\text{eff},P}^4$$

Ceci implique par un calcul analogue au point précédent:

$$T_{\text{eff},P}^4(\text{mauvais conducteur}) = \frac{1}{2}(1-A)\frac{R_\odot^2}{a^2}T_{\text{eff},\odot}^4$$

Le rapport de ces deux températures vaut:

$$\frac{T_{\text{eff},P}(\text{ bon conducteur })}{T_{\text{eff},P}(\text{mauvais conducteur})} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} = 0.84$$

7). Considérons une portion de surface dS située en θ.

$$\begin{cases} \mathrm{d}E_{\text{reçue},\mathrm{d}S} & = \frac{L_\odot}{4\pi a^2}\mathrm{d}S\cos(\theta)\ \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}E_{\text{absorbée},\mathrm{d}S} & = (1-A)\mathrm{d}E_{\text{reçue},\mathrm{d}S} \\ \mathrm{d}E_{\text{émise},\mathrm{d}S} & = \mathrm{d}E_{\text{absorbée},\mathrm{d}S} \end{cases}$$

La luminosité de la portion de surface dS vaut:

$$L_{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}E_{\text{émise},\mathrm{d}S}}{\mathrm{d}t} = (1-A)\frac{L_\odot}{4\pi a^2}\mathrm{d}S\cos(\theta)$$

En supposant que la portion de surface rayonne comme un corps noir:

$$L_{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\ \sigma\, T^4_{\text{eff},\mathrm{d}S}$$

Ce qui donne:

$$T^4_{\text{eff},\mathrm{d}S} = (1-A)\frac{L_\odot}{4\pi a^2\,\sigma}\cos(\theta)$$

La température sub-solaire est la température de l'unité de surface directement perpendiculaire à la direction planète-Soleil (i.e. $\theta = 0$). Ainsi:

$$T^4_{\text{sub-solaire}} = (1-A)\frac{L_\odot}{4\pi a^2\,\sigma} = (1-A)\frac{R^2_\odot}{a^2}T^4_{\text{eff},\odot}$$

8). Des points 5, 6 et 7 il vient:

$$\begin{cases} T^4_{\text{eff},P}(\text{bon conducteur}) & = \frac{1}{4}(1-A)\frac{L_\odot}{4\pi a^2\sigma} \\ T^4_{\text{eff},P}(\text{mauvais conducteur}) & = \frac{1}{2}(1-A)\frac{L_\odot}{4\pi a^2\sigma} \\ T^4_{\text{sub-solaire}} & = (1-A)\frac{L_\odot}{4\pi a^2\,\sigma} \end{cases}$$

Table 1: Températures en K

	Mercure	Vénus
bon conducteur	441	230
mauvais conducteur	525	273
sub-solaire	624	325

9).

- La surface de Mercure est un très mauvais conducteur, la surface éclairée est environ 7 fois plus chaude que la surface non-éclairée.

- Vénus, quant à elle, est un conducteur presque parfait. Les faces "jour" et "nuit" ont à peu près la même température.
- Le fait qu'une planète soit plus ou moins conductrice est lié au fait de posséder une atmosphère. Comme Mercure n'en a pas, elle est un mauvais conducteur, tandis que Vénus en possède une plutôt épaisse.
- Pour Vénus $A = 0.76$, cela signifie qu'elle réfléchit beaucoup la lumière du Soleil (sans l'absorber), c'est pourquoi elle nous apparaît brillante.