Cours d'Astrophysique II, Dr. Pascale Jablonka EPFL

Section de physique 3e année Série de la semaine No 5

29.10.2018 Semestre d'automne 2018

Corrigé: Applications diverses: pression, extinction, transfert

1. Pression

1. On a les valeurs suivantes: $m = 3 \cdot 10^{41}$ kg, $n = 0.1$ Mpc^{-3} = 10^{-19} pc^{-3} = $3.40 \cdot 10^{-69}$ m^{-3}

   La densité d'énergie cinétique est:

$$u_{cin} = \int_0^\infty n(p) E_{\text{cin}}(p)\, dp \qquad \text{avec} \qquad E_{\text{cin}}(p) = \frac{p^2}{2m}$$

   Si on n'a qu'une seule vitesse (on cherche un ordre de grandeur et on ne se préoccupe donc pas de tenir compte d'une distribution, fût-elle aussi simple que Maxwellienne), la densité d'énergie se réduit à:

$$n(p) = n\, \delta(p - m\overline{v})$$

$$u_{cin} = \int_0^\infty E_{\text{cin}}(p)\, n\, \delta(p - m\overline{v})\, dp = n\, \frac{(m\overline{v})^2}{2m} = n\, \frac{1}{2} m\overline{v}^2$$

   et la pression vaut:

$$P = \frac{2}{3} u_{cin} = \frac{1}{3} n\, m\overline{v}^2 = 3.4 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{N}\, m^{-2}$$

2. Dans l'approximation du corps noir, on a:

$$u_{rad} = \frac{4\sigma}{c} T^4 = aT^4$$

   La pression du rayonnement s'écrit ($a = 7.566 \cdot 10^{-16}$ J m^{-3} K^{-4}):

$$P_{rad} = \frac{1}{3} u_{rad} = \frac{1}{3} aT^4 = 1.39 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{N}\, m^{-2}$$

   Par conséquent, même actuellement la pression du rayonnement cosmologique est près de 10000 fois plus forte que celle dûe aux galaxies! Par contre, la densité d'énergie associée aux galaxies (à la matière en général) est bien plus élevée que celle associée au rayonnement cosmologique, à cause de l'énergie de masse des baryons.

2. Extinction atmosphérique

Tout d'abord, définissons la notion de "masse d'air" pour éviter de traîner la densité dans les équations.

On définit la masse d'air $a(z)$ (a comme *airmass*) comme étant 1 au zénit du lieu d'observation. Dans ce cas, on a en première approximation:

$$a(z) = \sec(z) + \mathcal{O}\left[\sec(z)^2\right]$$

où z est l'angle entre la direction de l'étoile et le zénit. Ne retenir que le second terme du membre de droite revient à adopter l'approximation d'une atmosphère plan-parallèle. Notons que pour les grandes masses d'air ($z > 60°$), cette approximation devient insuffisante.

Pour tenir compte de la dépendance de l'absorption en fonction de la direction (on remplace aussi ν par λ), la formule $I_\nu = I_\nu^0 \, e^{-\tau_\nu}$ doit être remplacée par:

$$I_\lambda(z) = I_\lambda^0 \, e^{-\tau_\lambda a(z)}$$

où τ_λ est la profondeur optique de l'atmosphère au zénit et I_λ^0 l'intensité hors atmosphère. Pour passer à la magnitude, il faut appliquer la formule de Pogson:

$$m_\lambda(z) - m_\lambda^0 = -2.5 \log\left(\frac{I_\lambda(z)}{I_\lambda^0}\right) = +2.5\ \log(e)\,\tau_\lambda\, a(z)$$

où m_λ^0 est la magnitude hors atmosphère. Finalement, on pose $K_\lambda \doteq 2.5\ \log(e)\,\tau_\lambda = 1.086 \cdot \tau_\lambda$, et la magnitude de l'étoile à une masse d'air $a(z)$ s'écrit:

$$m_\lambda(z) = m_\lambda^0 + K_\lambda \cdot a(z) \sim m_0(\lambda) + K_\lambda \cdot \sec z$$

où K_λ est le *coefficient d'extinction atmosphérique*. On voit donc que la magnitude apparente varie linéairement avec la masse d'air, ce qui n'est rigoureusement vrai que pour des magnitudes monochromatiques. La relation reste toutefois très proche d'une droite pour les magnitudes dites hétérochromatiques, c'est-à-dire définies dans un filtre à bande relativement large comme les filtres U, B et V de Johnson, mais la non-linéarité de la relation doit être prise en compte pour un travail de haute précision.

La relation linéaire en question est appelée "droite de Bouguer".

Détermination de la magnitude hors atmosphère: L'idée est d'observer une étoile donnée tout au long de la nuit. On choisit l'étoile de sorte qu'elle soit à grande masse d'air en début de nuit, par exemple, et près du zénit en fin de nuit. On l'observe 5 ou 6 fois au cours de la nuit, et l'on construit le graphique $m_\lambda(z)$ en fonction de $a(z)$. La relation linéaire est extrapolée à $a(z) = 0$, ce qui permet de trouver m_λ^0.

hypothèses en jeu: On suppose que l'extinction ne varie pas au cours du temps, et que l'atmosphère est homogène (symétrie cylindrique autour de la verticale du lieu). De plus, on admet évidemment que l'étoile choisie n'est pas une variable!

Comment lever une hypothèse: L'hypothèse la moins réaliste est celle de la constance temporelle de l'extinction. Pour pouvoir lever cette hypothèse, il faut observer au moins 2 étoiles. L'une se trouve à grande masse d'air en début de nuit, mais termine la nuit près du zénit (étoile "montante" M), tandis que l'autre est près du zénit en début de nuit mais à grande masse d'air en fin de nuit (étoile "descendante" D).

Supposons que l'extinction augmente au cours du temps: la pente de la droite $m_\lambda(a(z))$ de l'étoile D va augmenter par rapport au cas d'extinction constante, tandis que celle de l'étoile M va diminuer. Si l'on essaie de déterminer la magnitude hors atmosphère à partir de chaque droite sous l'hypothèse d'extinction constante, on aboutira à des valeurs fausses, et de plus incohérentes. Par contre, on a suffisamment d'information pour reconstituer la variation temporelle du coefficient d'extinction, pour autant que celle-ci soit suffisamment lente.

A titre d'exemple, voici les valeurs moyennes des coefficients d'extinction pour les filtres [U], [B] et [V] de la photométrie de Genève à La Silla (Chili, 2400 m d'altitude):

- $K_{[U]} = 0.59$ (3500 Å)
- $K_{[B]} = 0.25$ (4240 Å)
- $K_{[V]} = 0.12$ (5500 Å)

3. Transfert radiatif

L'équation de transfert générale s'écrit:

$$\frac{\partial I}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial I}{r\partial\theta}\sin\theta = \rho(j - \kappa I)$$

On multiplie cette équation par $\frac{1}{c}\cos\theta$ et on intègre sur les angles solides:

$$\frac{1}{c}\int\frac{\partial I}{\partial r}\cos^2\theta\ \mathrm{d}\Omega - \frac{1}{c}\int\frac{\partial I}{r\partial\theta}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\Omega - \frac{1}{c}\int\rho\left(j - \kappa I\right)\cos\theta\ \mathrm{d}\Omega = 0$$

Or par définition:

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{c}\textstyle\int I\ \mathrm{d}\Omega \\ F &= \textstyle\int I\cos\theta\ \mathrm{d}\Omega \\ P_{rad} &= \tfrac{1}{c}\textstyle\int I\cos^2\theta\ \mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

Ce qui donne, en admettant l'isotropie de l'émissivité mais non celle de l'intensité spécifique:

$$\frac{\mathrm{d}P_{rad}}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r}\frac{1}{c}\int \frac{\partial I}{\partial \theta}\sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\Omega + \frac{\rho\kappa}{c}F = 0$$

Or on a, en utilisant $\sin^3\theta = \sin\theta(1-\cos^2\theta)$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{c}\int \tfrac{\partial I}{\partial \theta}\sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\Omega &= \tfrac{2\pi}{c}\int_0^\pi \tfrac{\partial I}{\partial \theta}\sin^2\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta \\
&= \tfrac{2\pi}{c} I\sin^2\theta\cos\theta\Big|_0^\pi - \tfrac{2\pi}{c}\int_0^\pi I\left(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \tfrac{2\pi}{c}\int_0^\pi I\left(\sin\theta - 3\sin\theta\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \tfrac{1}{c}\int I\left(1 - 3\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\Omega \\
&= U - 3P_{rad}
\end{aligned}$$

Ainsi:

$$\frac{\mathrm{d}P_{rad}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r}\left(3P_{rad} - U\right) + \frac{\rho\kappa}{c}F = 0$$